LICEU

Niculae Ghiciu

Costel Chiteș

Exerciții, probleme și teste DE MATEMATICĂ

BACALAUREAT ȘI ADMITERE

EDITURA ALL

89430
12549

Scanned with OKEN Scanner

Exerciții, probleme şi teste de matematică
Niculae Ghiciu, Costel Chiteş

Copyright © 1999 Editura **ALL EDUCATIONAL.**

ISBN: 973 - 9431 - 18 - 6

Toate drepturile sunt rezervate Editurii **ALL EDUCATIONAL.**
Nici o parte din acest volum nu poate fi copiată fără permisiunea scrisă a Editurii **ALL EDUCATIONAL.**
Drepturile de distribuție în străinătate aparțin în exclusivitate editurii.

Copyright © 1999 by **ALL EDUCATIONAL.**

All rights reserved.
The distribution of this book outside Romania without the written permission of **ALL EDUCATIONAL** is strictly prohibited.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale
GHICIU, NICULAE
Exerciții, probleme şi teste de matematică / Niculae Ghiciu, Costel Chiteş. - Bucureşti: Editura ALL EDUCATIONAL, 1999
280 p. : 24 cm. - (Liceu)
ISBN 973-9431-18-6

I. Chiteş, Costel

51(075.35)(076)

Editura **ALL EDUCATIONAL** Bucureşti B-dul Timişoara, nr. 58, sect. 6, cod 76548
☎ 402.26.00,
Fax: 402.26.10

Departamentul distribuție
☎ 402.26.20
Fax: 402.26.30

Redactor: **Lucian Călianu**
Coperta: **Daniel Țuțunel**

PRINTED IN ROMANIA

Scanned with OKEN Scanner

GHICIU NICULAE COSTEL CHITEŞ

EXERCIȚII, PROBLEME ŞI TESTE DE MATEMATICĂ

EDITURA ALL

Scanned with OKEN Scanner

Colecția de matematică a Editurii *ALL Educational* cuprinde:

1. **871 probleme de matematică,** vol. I, II, E. Rogai, L. Modan
2. **Probleme alese de geometrie pentru liceu,** M. Popescu
3. **Numere complexe în matematica de liceu,** N. Dincă, M. Chiriță
4. **Geometrie în spațiu** – probleme, I. Georgescu
5. **Itinerar elementar în algebra superioară,** T. Albu, I.D. Ion
6. **Ghidul bacalaureatului,** I. Crăcea, L. Crăcea
7. **Furtuni pe mările elipsei şi alte povestiri despre curbe de ordin superior,** V. Gh. Vodă
8. **Lecții de analiză matematică,** P. Flondor, O. Stănăşilă
9. **Matematici speciale,** V. Brânzănescu, O. Stănăşilă
10. **Algebră liniară, geometrie analitică şi diferențială, ecuații diferențiale** – culegere de probleme, Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, M. Postolache
11. **Algebră liniară, geometrie analitică şi diferențială** – teorie, exemple, probleme, C.I. Radu
12. **Algebră liniară** – teorie şi probleme rezolvate, T. Stihi
13. **1000 de probleme rezolvate şi exerciții fundamentale,** Ana Niță, Tatiana Stănăşilă
14. **Elemente de aritmetică,** C. Vraciu, Mariana Vraciu
15. **Analiză matematică** – culegere de probleme, vol. I,II, N. Donciu, D. Flondor
16. **Teoria probabilităților,** Ioan Cuculescu
17. **Culegere de matematică** – teste grilă, D. Marin, Gh. Cenuşă, T. Andrei, S. Stancu
18. **Teste de matematică,** C. Niță, C. Chiteş, D. Săvulescu

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Scopul central al acestei lucrări este de a prezenta sub o formă unitară noțiuni de matematică cerute prin programă unui candidat la examenul de bacalaureat şi la concursul de admitere în învățământul superior.

Prin exercițiile propuse am vizat două aspecte: dezvoltarea deprinderilor de calcul, aplicarea şi aprofundarea cunoştințelor teoretice acumulate în liceu.

Lucrarea conține 3 capitole.

Capitolul I conține 137 de exerciții în care este structurată materia de liceu pe teme. Pentru aprofundarea unor teme, unele dintre exerciții au un număr mare de subpuncte.

Capitolul II conține 40 de subiecte tip bacalaureat (proba scrisă) pentru toate cele 4 profiluri:

a) matematică-fizică, informatică şi metrologie;
b) economic;
c) filologie;
d) şcoli normale.

Aceste subiecte permit şi autoevaluarea elevului pe baza baremului de corectare propus de autori.

Capitolul III propune 9 teste pentru admiterea în învățământul superior la facultățile: Politehnică, A.S.E. şi Arhitectură.

Sperăm că această lucrare va fi un material folositor în vederea ultimei recapitulări înaintea examenelor.

Autorii

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Capitolul I

Probleme recapitulative

Enunțuri 1
Indicații și răspunsuri 39

Capitolul II

Teste propuse pentru examenul de bacalaureat

Enunțuri 108
Rezolvări și bareme de corectare 141

Capitolul III

Teste propuse pentru examenul de admitere în învățământul superior

Enunțuri 223
Rezolvări 243

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

Probleme recapitulative

ENUNȚURI

Clasa a IX-a

1. Fie $M \neq \emptyset$ şi $A \subset M$. Definim funcția:

$$f_A : M \to \{0, 1\} \text{ prin } f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A \\ 0 & \text{dacă } x \in M - A \end{cases}$$

Dacă A, B sunt submulțimi ale lui M atunci:

1) $A = B \Leftrightarrow f_A = f_B$;
2) $f_{A \cap B} = f_A \cdot f_B$;
3) $f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_A \cdot f_B$;
4) $f_{CA} = 1 - f_A$;
5) $f_{A-B} = f_A \cdot (1 - f_B)$;
6) $f_A \cdot f_A = f_A$;
7) $f_{A \Delta B} = f_A + f_B - 2f_A \cdot f_B$ unde $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$;
8) Fie $A, B, C \in \mathcal{P}(M)$. Dacă $A \cap B = A \cap C$ şi $A \cup B = A \cup C$ atunci $B = C$;
9) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
10) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
11) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$;
12) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

2. Fie A, B, C mulțimi şi $f : A \to B$, $g : B \to C$ două funcții:

1) Dacă f şi g sunt funcții injective atunci $g \circ f$ este funcție injectivă;
2) Dacă f şi g sunt surjective atunci $g \circ f$ este funcție surjectivă;
3) Dacă f şi g sunt bijective atunci $g \circ f$ este bijectivă;
4) Dacă $g \circ f$ este injectivă atunci f este injectivă;
5) Dacă $g \circ f$ este surjectivă atunci g este surjectivă;
6) Dacă $g \circ f$ este bijectivă atunci f este injectivă şi g este surjectivă;
7) Dați exemplu de funcții f, g: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ pentru care $g \circ f$ este bijectivă, f este injectivă dar nu este surjectivă şi g este surjectivă dar nu este injectivă;
8) Funcția f: $A \to B$ este injectivă $\Leftrightarrow (\exists) r : B \to A$ cu proprietatea $r \circ f = 1_A$;
9) Funcția f: $A \to B$ este surjectivă $\Leftrightarrow (\exists) s$: $B \to A$ cu proprietatea $f \circ s = 1_B$;
10) Dacă f: $A \to B$ este o funcție atunci $(\exists) f_1$ = surjecție şi i = injecție astfel încât $f = i \circ f_1$.

Scanned with OKEN Scanner

3. Fie $f: X \to Y$ o funcție, $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$ atunci au loc afirmațiile:

1) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

2) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;

3) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;

4) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;

5) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) \Leftrightarrow f$ este injectivă;

6) Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \le 1 \\ 5x + 4, & x > 1. \end{cases}$ Calculați $f(\mathbf{R})$, $f((-\infty, 0))$, $f^{-1}((10, +\infty))$, $f^{-1}([0, +\infty))$.

7) Fie $g: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $g(n) = 5n$, $(\forall) n \in \mathbf{Z}$. Calculați $g(\mathbf{Z})$, $g(\mathbf{N})$, $g^{-1}(\mathbf{Z})$, $g^{-1}(5\mathbf{Z})$ unde $5\mathbf{Z} = \{5n \mid n \in \mathbf{Z}\}$.

8) Fie $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(n) = (-1)^n$. Calculați $f(\mathbf{Z})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{-1\})$, $f^{-1}(\{0\})$.

4. Fie o funcție $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încât $f(f(x)) = x^3 + 5$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.
Să se demonstreze că f este bijectivă.

5. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \le 0 \\ mx + n, & x > 0. \end{cases} \text{ unde } m, n \in \mathbf{R}.$$

1) Să se determine m și n pentru care f este injectivă;
2) Să se determine m și n pentru care f este surjectivă;
3) Să se determine m și n pentru care f este bijectivă și în acest caz să se determine f^{-1}.

6. Se consideră funcțiile $f, g, h, t: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = 2x - 1, \quad g(x) = |x|, \quad h(x) = \frac{x}{x^2 + 1},$$

$$t(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4), \ (\forall) x \in \mathbf{R}.$$

Calculați: 1) $f([0, 1])$; 2) $f([0, +\infty))$; 3) $f(\mathbf{R})$; 4) $g([-1, 1])$; 5) $g(\mathbf{Z})$; 6) $h(\mathbf{R})$; 7) $t(\mathbf{R})$.

7. Fie $f: \mathbf{R} - \{1\} \to \mathbf{R} - \{a\}$, $f(x) = \frac{x + 5}{x - 1}$.

1) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât f să fie bine definită;
2) Studiați injectivitatea și surjectivitatea lui f.

Scanned with OKEN Scanner

8. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to (-1, 1)$, $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

Arătați că:

1) f este strict crescătoare
2) $\operatorname{Im} f = (-1, 1)$;
3) f este bijectivă şi calculați f^{-1};
4) $(\forall)\, a, b \in \mathbf{R}$, $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \dfrac{|a|}{1+|a|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$.

9. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax+5, & x<0 \\ -3x, & x \ge 0. \end{cases}$

Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât f este strict descrescătoare.

10. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + m \ge 0, \quad (\forall) x, y \in \mathbf{R}.$$

11. Să se arate că familiile de parabole:

$$f_m(x) = (m+3)x^2 - (4m+7)x + 4m + 1$$

au un punct fix.

12. Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ şi $g(x) = -x^2 + 7x$.
Să se arate că $G_f \cap G_g \neq \emptyset$.

13. Se dă ecuația: $(m^2 + 1)x^2 - (2m + 1)x + 1 = 0$ unde $m \in \mathbf{R}$. Să se discute natura rădăcinilor ecuației în funcție de parametrul m.

14. Fie $x, y, z, t \in \mathbf{R}$ astfel încât $x + y = z + t$ şi $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$. Să se arate că $x^n + y^n = z^n + t^n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

15. Fie ecuația $2x^3 + x^2 - (m+1)x - m = 0$.

1) Arătați că ecuația admite o rădăcină independentă de m;
2) Determinați parametrul $m \in \mathbf{R}$ astfel ca toate rădăcinile ecuației date să fie mai mici decât 1.

16. Se consideră familia de parabole:

$$f_m(x) = x^2 - (m-1)x + 4 - m^2, \quad m \in \mathbf{R}.$$

Să se determine locul geometric al vârfurilor parabolelor.

Scanned with OKEN Scanner

17. 1) Calculați $0,3(12)+2,(50)$;

2) Fie $n \in \mathbf{N}$ atunci $\sqrt{n} \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow n = k^2, k \in \mathbf{N}$;

3) Arătați că $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ sunt iraționale;

4) Fie $a, b \in \mathbf{Q}$ cu $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}=0$ atunci $a=b=0$;

5) Dacă $a \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ atunci $\frac{1}{a} \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$;

6) Fie $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{Q}$ astfel încât $a_1+b_1\sqrt{2}=a_2+b_2\sqrt{2}$ atunci $a_1=a_2$ și $b_1=b_2$.

18. Să se arate că $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$ are loc egalitatea:

$$\left[\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}\right]=\left[\sqrt{4n^2+3}\right]$$

unde $[a]$ reprezintă partea întregă a numărului real a.

19. Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât:

$$(a-b-c)^2+(b-c-a)^2+(c-a-b)^2+\frac{3}{4} \leq |a+b+c|.$$

20. Rezolvați în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, sistemul:

$$\begin{cases} x^2+3y^2-4y=20, \\ x \cdot y+2x=16. \end{cases}$$

21. 1) Arătați că ecuația $3x^5+17x^2+x+7=0$ nu are soluții reale pozitive, dar are cel puțin una reală negativă;

2) Arătați că ecuația $x^4-x^3+3x^2+x+1=0$, nu are soluții reale negative.

3) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $x^3-5x^2+3x+1=0$.

4) Rezolvați în $\mathbf{R}$ inecuația: $x^3-4x^2+5x-2 \geq 0$.

22. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuațiile:

1) $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=0$.

2) $4x^4-16x^3+9x^2+5x+25=0$.

3) $9x^6+24x^5+28x^4+142x^3+172x^2+84x+441=0$.

4) $5x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+5=0$.

5) $4x^5-15x^3-5x^2+15x+9=0$.

Scanned with OKEN Scanner

23. Rezolvați ecuațiile următoare în **R**.

1) $2x^5 + 6x^4 - 7x^3 - 21x^2 - 4x - 12 = 0$

2) $(x+6)(x-7)(x+2)(x-3) + 180 = 0$.

24. Să se arate că graficul funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dată prin $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 7}$, nu trece prin nici un punct ale cărui coordonate să fie simultan întregi.

25. Fie ABC un triunghi cu unghiurile $\hat{B}$, $\hat{C}$ ascuțite. Să notăm cu G centrul său de greutate. Fie E, D picioarele perpendicularelor din G respectiv A pe BC. Să se arate că:

$$BD^2 - DC^2 = 3(BE^2 - EC^2).$$

26. Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC. Paralelele duse prin M la AB și AC formează cu BC un triunghi de arie S_a. Fie S_b și S_c analoagele lui S_a.

Să se arate că: $\frac{1}{\sqrt{S_a}} + \frac{1}{\sqrt{S_b}} + \frac{1}{\sqrt{S_c}} \geq \frac{9}{\sqrt{S}}$, unde S este aria ΔABC.

27. 1) Pe dreapta ce unește un punct fix A cu un punct P mobil al unui cerc de centru O, se ia un punct M astfel încât $\frac{AM}{MP} = k > 0$.

Să se determine locul geometric al punctului M.

2) Un triunghi ABC este înscris într-un cerc; vârfurile B, C sunt fixe iar A este mobil.

Să se determine locul geometric al centrului de greutate G.

28. 1) Proiecțiile ortogonale ale unui punct de pe cercul circumscris unui triunghi pe laturile acestuia sunt coliniare.

2) Dacă un punct se află în exteriorul unui triunghi și proiecțiile ortogonale ale acestuia pe laturi sunt trei puncte coliniare atunci punctul se află pe cercul circumscris triunghiului.

29. Demonstrați inegalitățile:

$$\frac{\pi}{2^{n+2}} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}} < \frac{1}{2^n}, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

30. Demonstrați că oricare ar fi $x > \frac{2}{3}$ este adevărată inegalitatea:

$$\sqrt{1+x^2} \cdot \sin\frac{\pi}{3x} > 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

31. Ordonați crescător numerele:

$$\cos 2,\ \cos 4,\ \cos 6,\ \cos 8.$$

32. Este posibil ca într-un triunghi oarecare ABC să aibă loc relațiile ?

$$\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{1}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{2}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{3}.$$

Clasa a X-a

33. Să se rezolve ecuațiile:

1) $2^{\log_5 x}+3\cdot x^{\log_5 2}=8.$

2) $3^x+4^x=7.$

3) $\log_2 x+3\cdot\log_2(x+3)=6.$

4) $4^x+(x-13)\cdot 2^x-2x+22=0.$

5) $\log_2(x^2+4)-\log_2 x=4x-x^2-2.$

6) $3^{\log_3(x^2-2x-1)}+x=2.$

34. Rezolvați ecuația: $x^{\lg(4x)}=625.$

35. Rezolvați inecuația: $x^{\log_2 x}<2.$

36. Verificați egalitățile:

1) $\left[\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right]=2;$

2) $\left[\sqrt{5}^{\sqrt{3}}\right]=4;$

3) $\left[\sqrt{10}^{\sqrt{7}}\right]=21$, unde $[\,x\,]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Scanned with OKEN Scanner

37. Determinați cifra p astfel încât:

$$\frac{p}{10} < \lg 2 < \frac{p+1}{10}.$$

38. Rezolvați în **R** ecuația:

$$\log_2(2x^2+\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}.$$

39. Să se rezolve inecuația în **R**:

$$(2^x+3^x)\cdot 6^x + (3^x+4^x)\cdot 12^x \le 6^{x+1}\cdot 4^x - 16^x\cdot(2^x+1).$$

40. Demonstrați prin inducție:

1) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (\forall) n \ge 1;$

2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad (\forall) n \ge 1;$

3) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \quad (\forall) n \ge 1;$

4) $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1), \quad (\forall) n \ge 1;$

5) $\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{12} n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1), \quad (\forall) n \ge 1;$

6) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2, \quad (\forall) n \ge 1;$

7) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{1}{3} n(4n^2-1), \quad (\forall) n \ge 1;$

8) $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)}, \quad (\forall) n \ge 2;$

9) $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)! - 1, \quad (\forall) n \ge 1;$

10) $\sum_{k=1}^{n} (3k-2)\cdot 2^k = 10 + (3n-5)\cdot 2^{n+1}, \quad (\forall) n \ge 1:$

Scanned with OKEN Scanner

11) $\sum_{k=1}^{n}(4k+1)5^{k-1}=n\cdot 5^n, \quad (\forall)n\geq 1;$

12) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k+2)(k+3)}2^{k-1}=\frac{2^n}{n+3}-\frac{1}{3}, \quad (\forall)n\geq 1;$

13) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}(k+1)!=\frac{(n+2)!}{2^n}-2, \quad (\forall)n\geq 1;$

14) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \quad (\forall)n\geq 1;$

15) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1, \ (\forall)n\geq 1;$

16) $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}, \quad (\forall)n\geq 2;$

17) $(7^n+3n-1)\vdots 9, \quad (\forall)n\geq 1;$

18) $(6^{2n}+19^n-2^{n+1})\vdots 17, \ (\forall)n\geq 1;$

19) $(2^{2n-1}-9n^2+21n-14)\vdots 27, \ (\forall)n\geq 1;$

20) Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin: $a_1=a_2=1$,
$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, $(\forall)n\geq 1$, atunci $a_{5n}\vdots 5$, $(\forall)n\geq 1;$

21) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots$
$\ldots+\frac{1}{2n}, \quad (\forall)n\geq 1.$

41. Să se calculeze, apoi să se demonstreze prin inducție formulele găsite.

1) $\sum_{k=1}^{n}k\cdot(k+1);$

2) $\sum_{k=1}^{n}k\cdot(k+1)(k+2)$

3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,(k+1)(k+2)};$

4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,(k+1)(k+2)(k+3)};$

5) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4k^2-1};$

6) $\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!;$

7) $\sum_{k=1}^{n}k!\,(k^2+k+1);$

8) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!};$

Scanned with OKEN Scanner

9) $\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1}$;

10) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$;

11) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$;

12) $\sum_{k=1}^{n} \log_{x^k} \sqrt[k+1]{a}$, unde $a > 0$ fixat.

13) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{(k+2)!}$;

14) $\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$.

15) $\prod_{k=1}^{n} \cos 2^k \cdot \alpha$.

16) $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(x+k\cdot h)$.

17) $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$.

18) $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(x+k\cdot h)$.

19) $\sum_{k=1}^{n} \cos kx$.

20) $\sum_{k=1}^{n} \sin^2 kx$.

21) $\sum_{k=1}^{n} \cos^2 kx$.

22) $\sum_{k=1}^{n} \sin^3 kx$.

23) $\sum_{k=1}^{n} \cos^3 kx$.

24) $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2+k+1}$.

25) $(\forall)\ m, n \in \mathbf{N}^*$ avem $m! \cdot n!$ divide $(m+n)!$.

42. 1) Se dau $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 3\cdot a_n - 2$, $(\forall) n \geq 1$. Demonstrați că:

$$a_n = 3^n + 1,\ (\forall)\ n \geq 1.$$

2) Se consideră $a_1 = 1$, $a_2 = 9$ și $a_{n+2} = 9 \cdot a_{n+1} - 20 \cdot a_n$, $(\forall) n \geq 1$.
Demonstrați că $a_n = 5^n - 4^n$.

3) Se consideră șirul lui Fibonacci: $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $(\forall) n \geq 1$

Să se demonstreze că:

a) $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1$, $(\forall) n \geq 1$

b) $u_1 + u_3 + u_5 \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}$, $(\forall) n \geq 1$

c) $u_2 + u_4 + u_6 \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$, $(\forall) n \geq 1$

d) $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n = (-1)^{n+1} u_{n-1} + 1$, $(\forall) n \geq 2$

e) $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$, $(\forall) n \geq 1$

f) $u_{n+m} = u_{n-1} \cdot u_m + u_n \cdot u_{m+1}$, $(\forall) n \geq 2$, $m \geq 1$

Scanned with OKEN Scanner

g) $u_n^2 + u_{n+1}^2 = u_{2n+1}$, $(\forall) n \geq 1$

h) $u_n = \dfrac{q_1^n - q_2^n}{\sqrt{5}}$, $(\forall) n \geq 1$ unde $q_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

i) $u_{n+5k} > 10^k \cdot u_n$, $(\forall) n \geq 2$ şi $k \geq 1$

j) Ecuația $u_n = n^2$ are soluțiile $n = 1$ şi $n = 12$.

43. Fie $a_0 = 1$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$ şi $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, $(\forall) n \geq 2$.

Arătați că $(\exists)\, m \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $(\forall) k \in \mathbf{N}$ avem $a_{m \cdot k} \in \mathbf{N}$.

44. Determinați termenul general pentru următoarele recurențe:

1) $x_0 = 1, x_1 = 2, x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}$, $(\forall) n \geq 1$.

2) $x_0 = 1, x_1 = 3, x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n$, $(\forall) n \geq 0$.

3) $x_0 = 3, x_1 = 0, x_2 = -1, x_{n+3} = 4x_{n+2} - 6x_{n+1} + 4x_n$, $(\forall) n \geq 0$.

4) $x_0 = 0, x_1 = 2, x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n + n$, $(\forall) n \geq 0$.

5) Fie $x_1 = 1, x_2 = 2$ şi $\dfrac{2}{x_n} = \dfrac{1}{x_{n+1}} + \dfrac{1}{x_{n-1}}$, $(\forall) n \geq 2$.

6) Fie $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot x_{n-1}}$, $(\forall) n \geq 2$.

45.

1) Orice mulțime nevidă de numere naturale admite un prim element.

2) Orice mulțime de numere naturale nevidă şi mărginită admite un ultim element.

3) Dacă $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ şi $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbf{Q}$ atunci $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbf{Q}$, $(\forall) n \geq 1$

4) $\{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 8\} = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 8$ şi $(\exists)\, p, q \in \mathbf{N}$ astfel încât $n = 3p + 5q\}$.

5) Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ astfel încât $a_1 \cdot a_2, \ldots, a_n = 1$ atunci
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n.$$

6) Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale strict pozitive atunci
$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

7) $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$ şi $n \geq 2$ avem $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} \cdots + \dfrac{1}{n} \notin \mathbf{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

8) $(\forall)\ \alpha \in \mathbf{R},\ \exists\, n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\alpha$.

9) $(\forall)\ n \in \mathbf{N}, n \geq 2,\ (\exists)\ p =$ prim, astfel încât $p > n$,

46. 1) $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$

pentru $n \in \mathbf{N}^*$ şi $x \in \mathbf{R}$.

2) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}<\frac{7}{10},\ (\forall) n \geq 1.$

3) $\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin\frac{(n-1)\cdot\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},\ (\forall) n \geq 1.$

4) $\sin\frac{\pi}{2n+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n},\ (\forall) n \geq 1.$

5) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n}},\ (\forall) n \geq 1.$

6) $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<3,\ (\forall) n \geq 1.$

7) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1,\ (\forall) n \geq 2.$

8) Determinați $x \in \mathbf{N}^*$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ să aibă loc egalitatea:

$$\frac{1^5}{x}+\frac{2^5}{x+1}+\frac{3^5}{x+2}+\ldots+\frac{n^5}{x+(n-1)}=\frac{1}{30}\cdot n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

47. 1) Câte numere întregi cuprinse între 1 şi 2000 sunt:

a) multiplu de 11;

b) multiplu de 11 dar nu multiplu de 3;

c) multiplu de 6 dar nu multiplu de 4.

2) Câte numere întregi satisfac inegalitățile:

$$12 < \sqrt{x} < 15\ ?$$

3) Măsura în grade sexagesimale a unui unghi dintr-un poligon regulat este un număr natural. Câte astfel de poligoane regulate există?

4) Câte linii frânte formate din câte 3 muchii ale unui cub unesc un vârf al acestuia cu vârful opus?

Scanned with OKEN Scanner

5) Alfabetul unei țări are 26 de litere. Câte plăcuțe de înmatriculare ale autoturismelor există dacă sunt formate din:
   a) 3 litere:
   b) 3 litere distincte;
   c) 3 litere dintre care ultima este una din vocalele: A, E, I, O, U?
   d) 3 litere distincte dintre care ultima este una din vocalele: A, E, I O, U?
6) O cameră are 6 uşi. În câte moduri este posibil să se intre pe o uşă şi să se iasă din cameră pe altă uşă?
7) Câte numere naturale cuprinse între 10.000 şi 100.000 există dacă ele sunt formate cu cifrele 6, 7, 8, 0?
8) Câte numere naturale cuprinse între 1000 şi 9999 inclusiv au cifre distincte? Câte dintre acestea sunt impare?
9) Din cifrele 1, 2, 3, 4, 5 câte numere de patru cifre distincte se pot forma? Câte dintre acestea sunt impare?
10) Din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 câte numere de 4 cifre distincte se pot forma? Câte dintre acestea sunt pare?
11) Câte numere naturale mai mari de 53.000 au următoarele 2 proprietăți:
   a) au cifre distincte;
   b) nu conțin pe 0 şi pe 9.
12) 20 de puncte sunt situate într-un plan astfel încât oricare 3 puncte sunt necolineare. Câte drepte se pot forma? Câte triunghiuri se pot forma?
13) Cu câte zerouri se termină numărul 179! ?
14) În câte moduri este posibil să aşezăm 8 persoane în jurul unei mese rotunde? Dar dacă anumite două persoane nu pot să stea alături?
15) În câte moduri diferite putem numerota fețele unui cub cu numerele de la 1 la 6 astfel încât suma oricăror numere de pe fețe opuse să fie 7?
16) În câte moduri putem aşeza 4 femei şi 4 bărbați în jurul unei mese rotunde ştiind că orice 2 bărbați nu stau alături?
17) Câți termeni există în dezvoltarea binomului $(x + y)^5$? Dar a binomului $(x + y)^n$?
18) Care este coeficientul binomial al lui $u^3 \cdot v^7$ în dezvoltarea $(u + v)^{10}$?
19) Verificați că dezvoltarea binomului $(x + y)^6$ este: $\sum_{i+j=6} \frac{6!}{i! \cdot j!} x^i \cdot y^j$.

Scanned with OKEN Scanner

20) Se consideră produsul:
$(a+b+c)(d+e+f)(p+q+r+s)(x+y+u+v+w)$.
a) Câți termeni are dezvoltarea?
b) Stabiliți care dintre termenii următori apar în dezvoltarea produsului dat: $a\cdot d\cdot p\cdot s$, $b\cdot d\cdot s\cdot w$, $b\cdot f\cdot p\cdot u$, $b\cdot f\cdot x\cdot w$.

21) Care este coeficientul lui $x^2\cdot y^2\cdot z^2\cdot w^2\cdot u^2$ în dezvoltarea expresiei: $(x+y+z+w+u)^{10}$?

22) Determinați suma coeficienților din dezvoltarea $(x+y+z)^8$.

23) Care este coeficientul lui x^3 din dezvoltarea $(1+x+x^2)^7$?

24) Determinați coeficientul lui x^7 din dezvoltarea $(1+x+x^2)^8$.

25) Determinați coeficientul lui x^9 din dezvoltarea $(1-2x+3x^2+4x^3-x^4)^5$.

48. Să se demonstreze:

1) Dacă $n, k \in \mathbf{N}$ și $0 \le k \le n$, atunci $C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ $(k<n)$.

2) Dacă $p, n \in \mathbf{N}^*$ și $p \ge n$, atunci $C_{n-1}^{n-1}+C_n^{n-1}+\ldots+C_{p-1}^{n-1}=C_p^n$.

3) Fie $n \in \mathbf{N}^*$ atunci, $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n$.

4) $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots=2^{n-1}$, $(\forall)n\in\mathbf{N}^*$.

5) $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^nC_n^n=0$, $(\forall)n\in\mathbf{N}^*$.

6) $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^2\right)^2+\ldots+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$, $(\forall)n\in\mathbf{N}^*$.

7) $C_n^0\cdot C_m^p+C_n^1\cdot C_m^{p-1}+\ldots+C_n^p\cdot C_m^0=C_{m+n}^p$, $m, n, p \in \mathbf{N}^*$ și $m \ge p$, $n \ge p$.

8) $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\cdot C_n^k=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$, $(\forall)n\in\mathbf{N}^*$.

9) Fie $p \in \mathbf{N}$ un număr prim și $1 \le k \le p-1$ atunci p divide C_p^k.

10) Fie p un număr prim și $a \in \mathbf{N}^*$, atunci (a^p-a) se divide prin p.

11) $C_n^0+C_n^4+C_n^8+C_n^{12}+\ldots=2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}$, $(\forall)n\in\mathbf{N}^*$.

12) $C_n^0+C_n^3+C_n^6+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cdot\cos\frac{n\pi}{3}\right)$, $(\forall)n\in\mathbf{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

13) $(\forall) x \in \mathbf{R}$ cu $|x| \leq 1 \Rightarrow (1-x)^n + (1+x)^n \leq 2^n$.

14) Calculați suma: $S = \sum_{k=1}^{3n} (-1)^k \cdot C_{6n}^{2k-1} \cdot 3^k$.

49. Să se determine progresiile geometrice $x_n = q^n$, $(\forall)\ n \geq 1$ ce verifică relația de recurență:

$$x_{n+2} = 8\, x_{n+1} - 15\, x_n, \quad (\forall)\ n \geq 1.$$

50. Să se calculeze suma:

$$S = a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots + n \cdot a^n, \text{ unde } a \in \mathbf{C}.$$

51. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ unde $a_1 > 0$ și $r > 0$. Calculați suma:

$$S_n = \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}.$$

52. Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$ și $i^2 = -1$, atunci se definesc $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, modulul numărului complex z și $\bar{z} = a - bi$, conjugatul numărului complex z. Demonstrați proprietățile următoare:

1) $|z| \geq 0$, $(\forall) z \in \mathbf{C}$ și $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

2) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $(\forall) z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.

3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $(\forall) z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.

4) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $(\forall)\ z_1 \in \mathbf{C}$ și $z_2 \in \mathbf{C}^*$.

5) $|\bar{z}| = |z|$, $(\forall)\ z \in \mathbf{C}$.

6) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $(\forall) z \in \mathbf{C}$.

7) Dacă $|z| = 1$ atunci $\bar{z} = z^{-1}$.

8) $z + \bar{z} = \text{Re}\, z$.

9) $z - \bar{z} = 2i \cdot \text{Im}\, z$.

10) $(\bar{\bar{z}}) = z$, $(\forall) z \in \mathbf{C}$.

11) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (generalizare).

12) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ (generalizare).

Scanned with OKEN Scanner

13) $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*, z \in \mathbf{C}$.

14) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $(\forall)\ z_1 \in \mathbf{C}$ şi $z_2 \in \mathbf{C}^*$.

15) $z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$.

16) Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ şi $z \in \mathbf{C}$ atunci $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.

17) Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ şi $z \in \mathbf{C}$ astfel încât $P(z) = 0$ atunci $P(\bar{z}) = 0$.

53. 1) Fie $z = 2 + 3i$. Calculați: $\bar{z}$, $\frac{1}{z}$, z^2, z^3, $|z|$.

2) Calculați părțile reale şi părțile imaginare ale următoarelor numere complexe:

$$z_1 = \frac{1}{1-i},\quad z_2 = \left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2,\quad z_3 = \left(\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

3) Dacă $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, atunci numerele $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2$, $z_1^n + \bar{z}_1^n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$ sunt reale.

4) Să se determine $z \in \mathbf{C}^*$ pentru care $z + \frac{1}{z} \in \mathbf{R}$.

5) Fie $z \in \mathbf{C}^*$ pentru care $\operatorname{Re} z < -\frac{1}{8}$, atunci are loc echivalența:

$$z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}.$$

6) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$, $(\forall)\ z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.

7) Dacă $z^2 = z_1 \cdot z_2$ atunci:

$$|z_1| + |z_2| = \left|\frac{z_1 + z_2}{2} - z\right| + \left|\frac{z_1 + z_2}{2} + z\right|.$$

8) Dacă $a, z \in \mathbf{C}$ şi $|a| = 1$ atunci $|z - a| = |1 - a\bar{z}|$.

9) Dacă $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ are loc identitatea:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2.$$

10) Dacă $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ are loc inegalitatea lui Hlawka:

$$|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| \le |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1 + z_2 + z_3|.$$

Scanned with OKEN Scanner

54. Fie $\varepsilon \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ cu $\varepsilon^7 = 1$. Să se determine funcția $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ știind că satisface relația:

$$f(x) + f(\varepsilon^2 \cdot x) = x^k, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{C}, \text{ unde } k \in \mathbf{N}^* \text{ fixat.}$$

55. Să se rezolve în **C** ecuațiile:

1) $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$
2) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$.
3) $x^2 = \mathrm{i}$.
4) $x^2 = 1 - \mathrm{i}$.
5) $x^4 = \mathrm{i}$.

56. Rezolvați în **C** următoarele ecuații:

1) $3x^3 - 10x^2 + 10x - 7 = 0$.
2) $15x^4 + 26x^3 + 58x^2 + 35x + 6 = 0$.
3) $48x^5 + 8x^4 + 35x^3 + 10x^2 - 13x + 2 = 0$.
4) $3x^6 + 10x^5 + x^4 - 20x^3 - 11x^2 + 10x + 7 = 0$.

57. Determinați rădăcinile comune ale polinoamelor:

$$P = 3X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 8X + 8 \text{ și } Q = 4X^4 - X^3 + 4X^2 - 9X + 2.$$

58. Determinați rădăcinile comune ale polinoamelor:

$$P = X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2 \text{ și } Q = X^4 + 6X^3 + 7X^2 + 6X + 1.$$

59. Determinați rădăcinile comune ale polinoamelor:

$$P = X^4 + X^3 + 2X^2 - 5X + 2 \text{ și } Q = X^4 - X^3 - 4X^2 + 3X + 2.$$

60. Să se determine $a, b \in \mathbf{Z}$ știind că ecuațiile: $x^3 + 2x^2 + ax + b = 0$, $x^3 - x^2 + bx + a = 0$ admit o rădăcină întreagă comună.

61. Rezolvați în **C** ecuația: $z^3 - (2\sqrt{3} + 3\mathrm{i})z^2 + (1 + 4\sqrt{3}\mathrm{i})z - 3\mathrm{i} - 6\sqrt{3} = 0$ știind că admite soluții de forma $y \cdot \mathrm{i}$, unde $y \in \mathbf{R}$.

62. Rezolvați în **C** ecuația: $z^3 - (\sqrt{3} + 2\mathrm{i})z^2 + (13 + 3\sqrt{3}\mathrm{i})z - 10\sqrt{3} + 10\mathrm{i} = 0$, știind că admite soluții de forma $y \cdot \mathrm{i}$, unde $y \in \mathbf{R}$.

63. Să se rezolve în **C** ecuația: $x^4 - 3x^3 - x^2 - 7x + 2 = 0$, știind că o rădăcină este de forma $x_1 = a + \sqrt{3}$, unde $a \in \mathbf{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

64. Se consideră polinomul $P = X^3 + aX^2 + bX - 1 \in \mathbf{R}[X]$. Să se arate că:
$$(x-1)^2 \mid P \Leftrightarrow (x-1)^3 \mid P.$$

65. Polinomul $P \in \mathbf{Z}[X]$ dă de fiecare dată restul 1998 la împărțirea prin binoamele $X - 1997$, $X - 1998$, $X - 1999$. Demonstrați că nu există $a \in \mathbf{Z}$ astfel încât $P(a) = 2001$.

66. 1) Fie ΔABC de afixe $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$.

ΔABC este echilateral $\Leftrightarrow$ $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$.

2) Numerele complexe distincte z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral dacă şi numai dacă
$$z_1 + \varepsilon \cdot z_2 + \varepsilon^2 \cdot z_3 = 0 \text{ unde } \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}.$$

3) Pe laturile patrulaterului convex $ABCD$ se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABM, BCN, CDP, DAQ. Să se arate că patrulaterele $ABCD$ şi $MNPQ$ au acelaşi centru de greutate.

4) Punctele M, N, P împart laturile ΔABC în acelaşi raport K. Să se arate că ΔMNP şi ΔABC au acelaşi centru de greutate.

5) Fie ΔABC echilateral şi P un punct în planul său, atunci cu segmentele PA, PB, PC se poate forma un triunghi (eventual degenerat).

67. Se consideră tetraedrul $ABCD$. Bisectoarele unghiurilor ADB, BDC, CDA intersectează (AB), (BC), (CA) în M, N, P. Demonstrați că CM, AN, BP sunt concurente.

68. Într-un tetraedru $ABCD$ determinați cel mai scurt drum de la C la D care să intersecteze $[AB]$.

69. Fie $ABCD$ un tetraedru oarecare. Notăm cu AM, AN, AP lungimile simedianelor în ΔABC, ΔACD şi ΔADB, $M \in (BC)$, $N \in (CD)$, $P \in (BD)$. Să se demonstreze că dreptele DM, BN, CP sunt concurente.

70. Se consideră tetraedrul $ABCD$.

1) Înălțimile din A şi D ale tetraedrului sunt secante dacă şi numai dacă $AD \perp BC$.

2) $AD \perp BC \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$.

3) Dacă $AB \perp CD$ şi $AC \perp BD$ atunci $AD \perp BC$.

Scanned with OKEN Scanner

71. Să se determine cel mai mare divizor comun al polinoamelor $P = X^n - 1$ şi $Q = X^m - 1$ unde $m, n \in \mathbf{N}^*$.

72. Dacă $m, n \in \mathbf{R}$, să se arate că polinomul $P = X^4 - X^3 + X^2 + mX + n$ nu are toate rădăcinile reale.

73. Să se arate, prin inducție după n, că rădăcinile polinomului:

$$f = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!}$$

sunt: 1, 2, 3, ..., n.

74. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât polinomul $(x^3 + y^3 + z^3 + mxyz)$ se divide prin polinomul $(x + y + z)$.

75. Se consideră ecuația $x^3 + x + m = 0$, unde $m \in \mathbf{R}$.
Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile complexe ale ecuației să se determine m ştiind că $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 10$.

76. Se consideră polinomul $P = X^{1999} + 3X + 7$.
Să se determine restul împărțirii lui P la $(X-1)^2$.

Clasa a XI-a

77. 1) Fie $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ cu $A \cdot B = B \cdot A$, atunci

a) $A \cdot B^m = B^m \cdot A, \quad (\forall) m \in \mathbf{N}^*$;

b) $A^n \cdot B^m = B^m \cdot A^n, \quad (\forall) m, n \in \mathbf{N}^*$;

c) $A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2} \cdot B + \ldots + B^{n-1}), \ (\forall) n \in \mathbf{N}, n \geq 2$

d) $(A+B)^n = C_n^0 \cdot A^n + C_n^1 \cdot A^{n-1} \cdot B + C_n^2 \cdot A^{n-2} \cdot B^2 + \ldots + C_n^n B^n$.

Scanned with OKEN Scanner

2) Dacă $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, $\alpha\in\mathbf{R}$,

atunci $A^n=\begin{pmatrix}\cos n\alpha & -\sin n\alpha\\ \sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$ $(\forall)n\in\mathbf{N}^*$.

3) Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\in\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$. Determinați λ, $\alpha\in\mathbf{R}$ astfel încât $A=\lambda\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ și apoi calculați A^n, $n\in\mathbf{N}^*$.

4) Se consideră $A=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\in\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ cu $a^2+b^2\neq 0$. Calculați A^n.

5) Orice matrice $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbf{M}_2(\mathbf{C})$ verifică o ecuație de forma $A^2-(\mathrm{Tr}A)\cdot A+\det A\cdot I_2=O_2$ (numită ecuația caracteristică asociată matricei A, unde $\mathrm{Tr}\,A=a+d$ este urma matricei A și $\det A=a\cdot d-b\cdot c$).
Să se demonstreze că există $x_n, y_n\in\mathbf{C}$ astfel încât
$$A^n=x_n\cdot A+y_n\cdot I_2,\quad (\forall)\ n\in\mathbf{N}.$$

6) Dacă $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbf{M}_2(\mathbf{C})$ și $\det A=0$, atunci $A^n=(a+d)^{n-1}\cdot A$.

7) Fie $A=\begin{pmatrix}i & -1\\ 1 & i\end{pmatrix}\in\mathbf{M}_2(\mathbf{C})$. Calculați A^{1996}.

8) Dacă $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, calculați A^n, $n\in\mathbf{N}^*$

9) Fie $A\in\mathbf{M}_3(\mathbf{C})$, $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 3}}$ atunci
$$A^3-\mathrm{Tr}(A)\cdot A^2+S(A)\cdot A-\det A\cdot I_3=O_3 \text{ unde}$$
$\mathrm{Tr}(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}$ este urma matricei,
$$S(A)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

· Să se demonstreze că există şirurile $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$, astfel încât

$$A^n = x_n \cdot A^2 + y_n \cdot A + z_n \cdot I_3, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

10) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n \in \mathbf{N}^*$.

11) Fie $A = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$. Calculaţi $I_2 + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{31}$.

78. Se consideră matricile:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & 16 & 28 & 2 \\ 10 & 13 & 8 & 25 \\ 7 & 9 & 1 & 23 \end{pmatrix}.$$

Arătaţi că au loc egalităţile:

$$A^2 - 10 \cdot A - 12 \cdot I_2 = O_2;$$
$$B^3 - 9 \cdot B^2 - 3B - 73 \cdot I_3 = O_3;$$
$$C^4 - 59 \cdot C^3 + 747 \cdot C^2 - 3030 \cdot C + 3444 = O_4.$$

79. Fie $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ astfel încât $B^4 = O$ şi $A = B^2 + I$. Să se arate că:

1) $A^K = I + k \cdot B^2$ pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$.
2) $I + A^6 - A^8$ este o matrice inversabilă.

80. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ cu $a, b, c \in \mathbf{Z}$.

1) Arătaţi că matricea A^n este de forma:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ cu } a_n, b_n, c_n \in \mathbf{Z}, (\forall)\ n \geq 1.$$

2) Să se calculeze temenii generali ai şirurilor $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$.
3) Arătaţi că dacă $p > 2$ este un număr prim şi nu toate numerele a, b, c se divid prin p atunci $p \mid n \Leftrightarrow p \mid a_n$, $p \mid b_n$ şi $p \mid c_n$.

Scanned with OKEN Scanner

81. Calculați rangul următoarelor matrice:

$$A=\begin{pmatrix} 12 & 31 & 9 & -7 \\ 43 & 78 & 90 & 87 \\ 15 & 23 & 4 & -8 \\ 17 & 51 & 28 & 9 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 6 & 14 & 9 & 7 \\ 2 & 15 & 31 & 27 \\ -3 & -1 & 5 & 14 \end{pmatrix}.$$

82. Calculați determinantul:

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 \\ a_3 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}.$$

83. 1) Determinați $\min A_i$, $\max A_i$, $\inf A_i$, $\sup A_i$ dacă există pentru mulțimile:

$$A_1=(0,1),\ A_2=[0,1],\ A_3=(0,1],\ A_4=[0,1),$$
$$A_5=[0,1]\cup\{2\},\ A_6=\{x\in \mathbf{Q}\mid x^2<2\}.$$

2) Determinați punctele de acumulare ale mulțimilor A_i din exercițiul precedent.

3) Dați un exemplu de submulțime $A\subset \mathbf{R}$, formată numai din puncte izolate.

4) Fie $V=[0,1]$. Determinați toate numerele reale x pentru care V este vecinătate a lui x.

5) Dați exemple de vecinătăți ale lui $-\infty$ și respectiv ale lui $+\infty$.

6) Determinați mulțimea punctelor de acumulare ale mulțimilor: $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}-\mathbf{Q}$.

7) Care dintre următoarele mulțimi: $(-\infty, 0)$, $(-\infty, 0]$, $[1, 2]$, $(1, 2)$, $[0, +\infty)$ sunt compacte ?

84. 1) Care dintre următoarele șiruri sunt mărginite?

$$a_n=(-1)^n,\ (\forall)n\geq 1;\quad b_n=(1+(-1)^n)\cdot n,\ (\forall)n\geq 1;$$

$$c_n=\frac{(-1)^n}{n},\ (\forall)n\geq 1;\quad d_n=5\cdot\sin n+6\cdot\cos n,\ (\forall)n\geq 1;$$

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ (\forall)n\geq 1;\quad f_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2},\ (\forall)n\geq 1;$$

Scanned with OKEN Scanner

$$x_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}},\ (\forall)n\geq 1;$$

$$y_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n},\ (\forall)n\geq 1.$$

2) Care dintre şirurile următoare sunt nemărginite?

$a_n = n,\ (\forall)n\geq 1;$ $b_n = \alpha^n$ unde $\alpha\in(0,1)$ şi $n\in\mathbf{N}^*$

$c_n = \frac{3^n}{n},\ (\forall)n\geq 1;$ $d_n = \alpha^n$ unde $\alpha>1$ şi $n\in\mathbf{N}^*;$

$e_n = \sqrt[n]{n},\ (\forall)n\geq 1;$ $f_n = \sqrt[n]{n!},\ (\forall)n\geq 1.$

3) Care dintre şirurile următoare sunt monotone?

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n},\ (\forall)n\geq 1;$$

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ (\forall)n\geq 1;$$

$$c_n = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!},\ (\forall)n\geq 0;$$

$$d_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n},\ (\forall)n\geq 1;$$

$$e_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n},\ (\forall)n\geq 1;$$

$f_n = \sin\frac{n\pi}{2},\ n\in\mathbf{N}^*;$ $g_n = \sqrt[n]{n},\ (\forall)n\geq 3.$

4) Utilizînd teorema de convergenţă cu ε să se arate că:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+5}{3n+1}=\frac{2}{3}.$

5) Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+n)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3-2n^2+1);$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt{n});$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n});$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}(-2n^3+7n^2+2);$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-1};$

Scanned with OKEN Scanner

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+7}{n^2}$; h) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^3+2n+1}{-2n^2+5}$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+n+2}{-n^3+7n+1}$; j) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_k\cdot n^k+a_{k-1}\cdot n^{k-1}+\ldots+a_0}{b_p\cdot n^p+b_{p-1}\cdot n^{p-1}+\ldots+b_0}$;

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$; l) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin n}{n^2+1}$;

m) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$; n) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$;

o) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right]$; p) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$;

q) $\lim\limits_{n\to\infty}a^n$; r) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n$; s) $\lim\limits_{n}\dfrac{2^n}{3^n}$; t) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+(-2)^n}{5^n}$;

u) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\right)^n$; v) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}\right)^n$; z) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

6) Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}}}_{n\text{ radicali}}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin n}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)^3}$; g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(a\sin\dfrac{n\pi}{5}+b\cos\dfrac{n\pi}{5}\right)$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin 1+\sin 2+\ldots+\sin n}{n^2}$; i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}$;

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{a^n}$, unde $a\in\mathbf{R}$ şi $a>1$. k) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{n!}$; l) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$;

Scanned with OKEN Scanner

m) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$;

n) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha^n+\alpha^{n+1}+\ldots+\alpha^{2n}\right), \alpha\in(-1,1)$;

o) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}$; p) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{C_n^0}+\frac{1}{C_n^1}+\frac{1}{C_n^2}+\ldots+\frac{1}{C_n^n}\right)$;

q) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)$;

r) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)\ldots(1+n^2)}$; s) $\lim\limits_{n\to\infty} 0,2\underbrace{333\ldots3}_{(n-1)\text{ cifre}}$;

t) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$; u) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$;

v) $\lim\limits_{n\to\infty}(5^n-a^n)$ unde $a\in\mathbf{R}_+^*$.

7) Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n})$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a\sqrt{n+2}+b\sqrt{n+1}+c\sqrt{n})$ unde $a+b+c=0$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n})$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{5n+2}-\sqrt{5n+1})$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt{n+1})$; g) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[5]{n^3+n}-\sqrt[5]{3n^3+2n})$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[5]{4n+2}-\sqrt[5]{3n+1})$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2\sqrt{n+1}}-\sqrt{n+4\sqrt{n+1}})$;

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+7}\right)^n$; k) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+2n+1}{4n^2+7}\right)^{\frac{n^2+3}{2n+5}}$;

l) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n+9}{4n+3}\right)^n$; m) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3n^2-1}{n^2+n+1}}$; n) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin\frac{\pi}{n}$;

Scanned with OKEN Scanner

p) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^n$; q) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-2}\right)^n$;

r) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{0!}+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right)$; s) $e=\dfrac{1}{0!}+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{\theta_n}{n!\cdot n}$

unde $\theta_n\in(0,1)$, $(\forall)n\geq 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=1$;

t) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin(2\pi\cdot e\cdot n!)$; u) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{n}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\right)^{n^3}$;

v) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt[3]{n^3+n+x}\cdot\pi)$ unde $x\in\mathbf{R}$;

z) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos a\cdot\cos\dfrac{a}{2}\cdots\cos\dfrac{a}{2^n}\right)$, $a\neq k\pi$;

w) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^3+7k^2+12k+2}{(k+3)!}$.

8) a) Dacă $a_n>0$, $(\forall)n\geq 1$ şi $(\exists)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$ atunci pentru

$l<1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, pentru $l>1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$ şi pentru $l=1$, indecidabil.

Calculați următoarele limite:

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{n+1}}{2^n\cdot n!}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n\cdot n!}{n^{n-1}}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{n!}$ unde $k\in\mathbf{N}$ fixat;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{n^n}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(2n-1)!!}$; g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(2n-1)!!}$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n\cdot n!}{n^n}$; i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

9) a) Să se arate că $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, $(\forall)n\geq 1$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Arătați că șirul $\gamma_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$, $(\forall) n \geq 1$ este monton și mărginit; $c = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0{,}57\ldots$

Calculați:

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{qn}\right)$ unde $q \in \mathbf{N}$, $q \geq 2$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{pn+1}+\frac{1}{pn+2}+\ldots+\frac{1}{qn}\right)$ unde $p, q \in \mathbf{N}^*$, $p < q$.

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{n^3+k}$; h) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+k}}$ unde $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 2$ fixat;

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$; k) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$;

l) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin n! \cdot \pi \cdot x)$ unde $x \in \mathbf{Q}$, fixat;

m) $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$; n) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n \cdot \sin\frac{\pi}{a^n}$ unde $a > 0$ fixat;

o) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$; p) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{2}{5}\right)^n + n^3 \cdot \sin\frac{\pi}{3^n}\right]$;

q) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{40^n+401^n+2\cdot 1998^n}{2^n+3^n-3\cdot 1998^n}$; r) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^e+2^e+3^e+\ldots+n^e}$;

s) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$; t) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1!+2!+3!+\ldots+n!}{(2n)!}$.

Scanned with OKEN Scanner

10) a) Fie $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ şiruri reale, $y_n \nearrow +\infty$ şi $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l \in \overline{\mathbf{R}}$,

atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$ (Stolz – Cesàro).

b) Fie $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ şiruri reale, $y_n \searrow 0$ şi $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l \in \mathbf{R}$, atunci

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$ (Stolz – Cesàro – cazul $\left(\frac{0}{0}\right)$).

c) Dacă $a_n > 0$, $(\forall)\ n \geq 1$ şi $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = a.$$

d) Dacă $a_n > 0$, $(\forall)\ n \geq 1$ şi $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ atunci $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

Calculaţi limitele:

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$ unde $k \in \mathbf{N}^*$ fixat;

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{n+1} + \cos\frac{\pi}{n+2} + \cdots + \cos\frac{\pi}{2n}}{n}$;

g) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$; h) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$; i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$; j) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}$;

k) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n + 7^n}$; l) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$;

m) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$ unde $a > 0$ fixat;

n) $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n}$; o) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n}$ unde $a > 1$ fixat;

Scanned with OKEN Scanner

p) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}$;

q) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{2n+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n+1}}$;

r) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi\cdot\sqrt[n]{e}$; s) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\pi\cdot\sqrt{n^2+n}$;

t) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+\cdots+n^n}$; u) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$;

v) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1\right)$; z) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[4]{2!}+\cdots+\sqrt[n]{n!}}{n}$.

11) Calculați:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\frac{\pi^2}{8}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}\right]$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^4}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left[\frac{\pi^4}{96}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^4}\right]$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^6}$; h) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^6}$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty} n^5\left[\frac{\pi^6}{960}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^6}\right]$; j) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^8}$;

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^8}$; l) $\lim\limits_{n\to\infty} n^7\left[\frac{17\pi^8}{161280}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^8}\right]$.

12) a) Fie $x\in\mathbf{R}$ şi $a_1=\sin x$, $a_{n+1}=\sin a_n$, $(\forall)n\geq 1$.
Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

b) Determinați şirul $a_n>0$, $(\forall)n\geq 1$ dacă $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^3=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right)^2$,
$(\forall)n\geq 1$;

Scanned with OKEN Scanner

c) Arătați că şirul $a_n = \sin n$, $(\forall) n \geq 1$, este divergent;

d) Determinați cel mai mic termen al şirului $u_n = \frac{n^2}{2} - 7n$, $(\forall) n \geq 1$;

e) Determinați cel mai mare termen al şirului:

$$u_n = \frac{7n}{3} - \frac{n^2}{2}, \ (\forall) n \geq 1;$$

f) Fie $0 < b_0 < a_0$ şi $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$, $b_1 = \sqrt{a_0 \cdot b_0}$, $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$;

$b_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot b_{n-1}}$, $(\forall) n \geq 1$. Demonstrați că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$;

g) Fie $a > 0$ şi $a_1 = \sqrt{a}$, $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$, $(\forall) n \geq 1$.

Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$;

h) Fie $x_0 = 0$, $x_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot x_n + 1$, $(\forall) n \geq 0$. Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$;

i) Fie $x_0 = -1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{2^n}$, $(\forall) n \geq 0$. Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$;

j) Fie $x_0 = 1$, $x_{n+1} = -x_n + n$, $(\forall) n \geq 0$. Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$;

k) Fie $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}$, $(\forall) n \geq 1$. Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$;

l) Fie $x_0 = 1, x_1 = 0$, $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{4} x_{n-1}$, $(\forall) n \geq 1$. Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$;

m) Fie $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $(\forall) n \geq 3$, atunci $(\exists!)\ p > 0$

astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{p^n} = \frac{1}{\sqrt{5}}$;

n) Fie $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ şi $x_{n+3} = 6\, x_{n+2} - 11 \cdot x_{n+1} + 6 \cdot x_n$,

$(\forall) n \geq 1$. Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{3^n}$;

o) Dacă $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \in \mathbf{R}$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b \in \mathbf{R}$ calculați

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_1 \cdot y_n + x_2 \cdot y_{n-1} + \cdots + x_n \cdot y_1}{n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

85. Calculați următoarele limite de funcții

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}+2x^{50}-3}{x^{20}-3x^{10}+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$; 3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3-\sqrt[3]{x+22}}{x-5}$;

4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt[3]{x+22}}{\sqrt[4]{x+11}-2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3}{x^3-3x^2+3x-2}-\dfrac{1}{x-2}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|}{x}$; 7) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} e^{\frac{x}{1-x^2}}$; 8) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} e^{\frac{x}{1-x^2}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\cos\dfrac{\pi}{x}$;

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\cos\dfrac{\pi}{x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^3-1}$; 12) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^3 7x}{x^2\cdot\sin x}$; 14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{3x})}{\ln(1+e^{5x})}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

86. Determinați asimptotele graficelor funcțiilor:

1) $f_1(x)=\dfrac{1}{(x-2)^4}$; 2) $f_2(x)=\dfrac{x^3}{x^2+7}$; 3) $f_3(x)=\sqrt{x^2-9}$;

4) $f_4(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+9}}$; 5) $f_5(x)=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2-1}}$; 6) $f_6(x)=\dfrac{\sin x}{x}$;

7) $f_7(x)=x\cdot\operatorname{arctg} x$; 8) $f_8(x)=x\cdot\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

87. 1) Să se arate că funcția $f:[0,4]\to\mathbf{R}$, $f(x)=2x+3$ este continuă în $x_0=2$.

2) Să se determine constanta reală m astfel încât următoarele funcții $f_i:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ să fie continue:

a) $f_1(x)=\begin{cases} mx+5, & x<1\\ x+3, & x\geq 1\end{cases}$; b) $f_2(x)=\begin{cases} e^x, & x\leq 0\\ x+m, & x>0\end{cases}$;

c) $f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ m, & x=0\end{cases}$; d) $f_4(x)=\begin{cases} 2x+m, & x\leq 0\\ \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0.\end{cases}$

3) Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ astfel încât $|f(x)-1|\leq(x-1)^4$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$. Să se arate că $f(1)=1$ și că f este continuă în $x_0=1$.

Scanned with OKEN Scanner

4) Pentu funcțiile următoare stabiliți punctele de discontinuitate şi de ce speță sunt:

a) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}\\ 0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\le 0\\ 6x, & x>0\end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ -1, & x=0.\end{cases}$

5) Arătați că funcția $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\max(x, x^2)$ este continuă.

6) Dacă $f, g : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ sunt funcții continue şi $f(x)=g(x)$, $(\forall)\, x\in\mathbf{Q}$ atunci $f=g$.

7) Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este continuă şi $f(x+y)=f(x)+f(y), (\forall)\, x, y\in\mathbf{R}$ atunci $f(x)=k\cdot x$, $(\forall)\, x\in\mathbf{R}$ şi $k\in\mathbf{R}$ fixat.

8) Care dintre următoarele funcții este uniform continuă?

a) $f\colon [0,2]\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2$;

b) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2$;

c) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=ax+b$;

d) $f\colon \left(0, \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

9) Fie $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=|x|$, $(\forall)\, x\in\mathbf{R}$.

Calculați: $f((-1,1))$, $f^{-1}((2,3))$, $f^{-1}([0,5])$.

10) Se consideră funcția $f:[-2,2]\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}2, & x\in[-2,0)\\ x, & x\in[0,2]\end{cases}.$$

Calculați $f([-2,2])$. f are proprietatea Darboux?

11) Stabiliți care din funcțiile următoare are proprietatea Darboux?

a) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbf{Q}\\ x^3, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

88. 1) Se consideră polinomul $P \in \mathbf{R}[X]$.

$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ şi fie $x_0 \in \mathbf{R}$ fixat.

Determinaţi numerele reale $A_0, A_1, \ldots, A_n$ pentru care are loc egalitatea: $P(X) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots + A_n(x - x_0)^n$.

2) Fie $P \in \mathbf{R}[X]$, grad $P = n$ şi $k \in \mathbf{N}^*$, $k \leq n$.

Arătaţi că $x_0 \in \mathbf{R}$ este rădăcină multiplă de ordin k dacă şi numai dacă: $P(x_0) = P'(x_0) = \ldots = P^{(k-1)}(x_0) = 0$ şi $P^{(k)}(x_0) \neq 0$.

3) Să se arate cu ajutorul derivatelor că următoarele funcţii polinomiale au rădăcinile multiple indicate în dreptul fiecăreia.

a) $f(x) = nx^{n+2} - (n+2)x^n + 2$, $x_1 = x_2 = 1$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, $x_1 = x_2 = x_3 = 1$

c) $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$, $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$.

4) Se consideră polinomul $P(X) = X^{72} - 5X^2 + 2 \in \mathbf{R}[X]$.

Să se determine restul împărţirii lui P la polinomul $(X-1)^3$.

5) Polinomul $P = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \ldots + \frac{X^n}{n!}$ are numai rădăcini simple.

89. Se consideră funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x + 1, & x \leq 0 \\ a \cdot \sin x + b \cos x, & x > 0 \end{cases}.$$

Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât f să fie derivabilă pe $\mathbf{R}$.

90. Se consideră funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$.

Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât f să fie derivabilă în $x = 0$.

91. Determinaţi $a > 0$ astfel încât $a^x \geq x + 1$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.

92. Se consideră funcţia $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - x + 1$. Arătaţi că f satisface condiţiile aplicării teoremei lui Rolle şi găsiţi punctul intermediar.

93. Fie funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

1) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

2) Verificaţi aplicabilitatea teoremei lui Lagrange pe un interval $[c, d] \subset \mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

3) Arătați că $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} f'(x_k) = -f(1) = -\frac{1}{2}$ unde x_k este punctul intermediar obținut prin aplicarea teoremei lui Lagrange funcției f pe intervalul $[k+1, k+2]$.

94. Dați exemplu de o funcție reală având asimptote verticale toate dreptele de ecuații $x = k$, $k \in \mathbf{Z}$.

95. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x + 10$.

1) Arătați că f este bijectivă.

2) Arătați că $f'(x) > 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.

3) Calculați $(f^{-1})'(20)$.

96. Cum se poate utiliza teorema lui l'Hospital în calculul limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}$?

97. 1) Trasați graficul funcției $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

2) Deduceți inegalitatea: $n^{n+1} > (n+1)^n$, $(\forall) n \geq 3$.

98. Să se scrie ecuațiile tangentelor, paralele cu prima bisectoare, la cercul cu centrul în origine și cu raza egală cu 2.

99. Fie M un punct variabil pe prima bisectoare și $A(3, 1)$, $B(-1, 2)$ două puncte fixe. Dreapta AM taie axa Ox în P, iar dreapta MB taie axa Oy în Q. Să se arate că dreapta PQ trece printr-un punct fix, ale cărui coordonate se cer.

100. Găsiți centrul și raza cercului a cărui ecuație este: $x^2 + y^2 + x - 4y - 2 = 0$.

101. Determinați ecuația cercului ce trece prin punctele $A(-1, 1)$, $B(2, -1)$, $C(1, 3)$.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XII-a

102. Determinați elementele inversabile din monoizii $(\mathbf{Z}_{10}, \cdot)$ și $(\mathbf{Z}_{12}, \cdot)$.

103. Să se arate că matricea $\begin{pmatrix} 1821 & 1514 & 1438 & 1944 \\ 1916 & 1945 & 1918 & 1600 \\ 1990 & 1992 & 1601 & 1996 \\ 1948 & 1962 & 1986 & 1907 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbf{R})$ este nesingulară.

104. Fie șirul $(F_k)_{k\geq 0}$ definit astfel: $F_0 = 1$, $F_1 = 0$ și $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, $(\forall) x \in \mathbf{N}^*$ și $M = \left\{ \begin{pmatrix} F_k & 0 & F_{k+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ F_{k+1} & 0 & F_{k+2} \end{pmatrix} \mid k \in \mathbf{N} \right\}$.

Să se arate că $(M, \cdot)$ este monoid comutativ.

105. Se consideră matricea cu elemente numere întregi:

$$A = \begin{pmatrix} 204 & 222 & -88 \\ 376 & 321 & 424 \\ 818 & 253 & 496 \end{pmatrix}.$$

Stabiliți dacă:
1) $\det(A)$ este un număr par;
2) $\det(A)$ se divide cu 3;
3) A este inversabilă în $\mathbf{M}_3(\mathbf{Q})$;
4) A este inversabilă în $\mathbf{M}_3(\mathbf{Z})$;
5) A este inversabilă în $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$.

106. 1) Scrieți tabla compunerii lui $S_3 = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$ unde

$$e = \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Deduceți că $(S_3, \circ)$ este grup necomutativ.

Scanned with OKEN Scanner

3) Calculați $\min\{m \in \mathbf{N}^* \mid \sigma_k^m = e\}$, $(\forall)\ 0 \le k \le 5$.

4) Calculați $\sigma_1^{1999}, \sigma_2^{2000}, \sigma_3^{2001}, \sigma_4^{2002}, \sigma_5^{2003}$.

5) Rezolvați în $(S_3, \circ)$ ecuațiile: $x^2 = e$; $y^3 = e$; $z^4 = e$; $t^5 = e$; $p^6 = e$.

6) Demonstrați că $(S_n, \circ)$ este grup necomutativ $\Leftrightarrow n \ge 3$.

107. 1) Fie $G = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$. Arătați că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

2) Fie $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbf{R} \right\}$. Arătați că $(M, \cdot)$ este grup comutativ.

3) $(G, \cdot) \cong (M, \cdot)$.

108. 1) Arătați că $(6\mathbf{Z}, +)$ și $(8\mathbf{Z}, +)$ sunt subgrupuri izomorfe ale lui $(\mathbf{Z}, +)$.
2) Care dintre mulțimile $6\mathbf{Z} \cap 8\mathbf{Z}$ și $6\mathbf{Z} \cup 8\mathbf{Z}$ formează un subgrup al lui $\mathbf{Z}$?

109. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $f : G \to G$, $f(x) = x^{-1}$, $(\forall) x \in G$.
Atunci f este automorfism $\Leftrightarrow$ $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

110. Să se determine toate morfismele de grup de la grupul $(\mathbf{Q}, +)$ în grupul $(\mathbf{Q}^*, \cdot)$.

111. Fie $(G, \cdot)$ un grup multiplicativ cu proprietățile:
$(x \cdot y)^3 = x^3 \cdot y^3$, $(x \cdot y)^4 = x^4 \cdot y^4$, $(x \cdot y)^5 = x^5 \cdot y^5$, $(\forall) x, y \in G$.
Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

112. Să se descrie grupurile cu 4 elemente.

113. Să se descrie grupurile cu 6 elemente.

114. 1) Orice corp este inel integru. Reciproca e adevărată?
2) Fie $p \in \mathbf{N}^*$. p prim $\Leftrightarrow \mathbf{Z}_p$ inel integru $\Leftrightarrow \mathbf{Z}_p$ corp.

115. Se consideră funcția $H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$ și $f(x) = H(x-2) \cdot \sin x + H(-x) \cdot \cos x$,
$(\forall) x \in \mathbf{R}$. Trasați graficul funcției f și calculați $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Scanned with OKEN Scanner

116. Fie $I(a)=\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x\cdot ctga+1}$ unde $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Scrieți în ordine crescătoare numerele: $I\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right), I\left(\frac{1}{10}\right), I\left(\frac{10}{31}\right)$.

117. Funcția continuă $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ satisface condiția $f(x)+f(a+b-x)=c$ (constant), $(\forall)x\in[a,b]$.

Să se arate că: $\int_a^b f(x)dx=(b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$.

118. Arătați că funcția $f\cdot\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbf{Q}\\ x^2, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}\end{cases}$ nu admite primitive.

119. Fie $x>0$, calculați $\int\frac{x}{1+x+e^x}dx$.

120. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x^5, & x\in[0,1]-\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n}\right\}\\ 5^x, & x\in\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n}\right\}\end{cases}$$ unde $n\in\mathbf{N}^*$ fixat. Arătați că f este integrabilă şi $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$.

121. Să se calculeze integrala:

$$\int\frac{3\cos x+7\sin x}{5\cos x+2\sin x}dx.$$

122. Pentru $x>0$ calculați $\int\frac{1}{x(x^6+1)}dx$.

123. Pentru $x\in\mathbf{R}$ calculați $\int\frac{1}{2^x+3}dx$.

Scanned with OKEN Scanner

124. Se consideră funcția $f:[-1,\ 1]\to \mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{(\sin x)\cdot e^{x^2}\cdot(1+x^2)}{\ln(1+x^4)}$.

Calculați $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

125. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\in\mathbf{Q}\\ \dfrac{1}{x}, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}\end{cases}$.

1) Arătați că f este inversabilă și determinați inversa f^{-1}.
2) f admite primitive?
3) f este integrabilă pe intervalul $[0, 1]$?

126. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n x^2\cdot e^{-x}dx$.

127. Arătați că $(\exists)x>0$ astfel încât $\int_0^x \dfrac{t^2}{t^2+1}dt=\dfrac{1}{3}$.

128. Arătați că $\int_{-2}^{2}\sqrt{4x^2+1}dx=\int_{-3}^{1}\sqrt{4x^2+8x+5}dx$.

129. Fie funcția $f:[0,\ 1]\to\mathbf{R}$ continuă, atunci $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n\cdot f(x)dx=0$.

130. Calculați $\int_0^2 \max(x,x^3)dx$.

131. Arătați că: $\dfrac{1}{2}\le\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}\le\dfrac{\pi}{6}$, $(\forall)x\in\mathbf{N}^*$.

132. Arătați că: $\int_2^{10} x\cdot\operatorname{arctg}x dx>\int_2^{10}\ln(1+x^2)dx$.

133. Stabiliți o relația de recurență pentru integrala: $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n dx$, $(\forall)n\in\mathbf{N}^*$.

134. Se consideră funcția $f:(0,\ +\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=\int_{x^2}^{x^3}\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$. Calculați $f'(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

135. Calculați $\lim\limits_{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

136. Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\int_0^x \sin^2 t \, dt}{x}$.

137. 1) Dați un exemplu de funcție $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ integrabilă ce nu admite primitive.

2) Dați un exemplu de funcție $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ ce admite primitive dar nu este integrabilă.

Scanned with OKEN Scanner

INDICAȚII ŞI RĂSPUNSURI

Clasa a IX-a

1. 1) Dacă $A = B$ atunci $f_A = f_B$. Reciproc, dacă $f_A = f_B$, fie $x \in A \Leftrightarrow f_A(x) = 1 = f_B(x) \Leftrightarrow x \in B \Rightarrow A = B$.

2) Fie $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ şi $x \in B \Rightarrow f_A(x) \cdot f_B(x) = 1 = f_{A\cap B}(x)$.
Fie $x \notin A \cap B \Rightarrow f_{A\cap B}(x) = 0$ şi $x \notin A$ sau $x \notin B \Rightarrow f_A(x) = 0$ sau $f_B(x) = 0$ deci $f_{A\cap B}(x) = 0 = f_A(x) \cdot f_B(x)$.
Deci are loc relația 2.
Analog se demonstrează proprietățile 3) – 7).

8) $f_{A\cap B} = f_{A\cap C}$ şi $f_{A\cup B} = f_{A\cup C} \Rightarrow f_A \cdot f_B = f_A \cdot f_C$ şi $f_A + f_B - f_A \cdot f_B = f_A + f_C - f_A \cdot f_C$
$\Rightarrow f_B = f_C \Rightarrow B = C$.

Metoda II
$B = B \cap (A \cup B) = B \cap (A \cup C) = (B \cap A) \cup (B \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C) =$
$= (A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap C = C$.

Metoda III
Se arată că $B = C$ prin dublă incluziune.
9) – 12) se demonstrează cu proprietățile funcției caracteristice f_A.

2. 1) Fie $x_1, x_2 \in A$ astfel încât $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

2) Fie $c \in C \Rightarrow (\exists) b \in B$ astfel încât $g(b) = c \Rightarrow (\exists) a \in A$ astfel încât $f(a) = b \Rightarrow$
$\Rightarrow c = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$, deci $g \circ f$ este surjectivă.

3) Consecință a lui 1) şi 2).

4) Dacă $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_2)) = g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, deci f este injectivă.

5) Fie $c \in C \Rightarrow (\exists) a \in A$ a.î. $(g \circ f)(a) = c \Rightarrow g(f(a) = c$, $f(a) = b \in B \Rightarrow$
$\Rightarrow g(b) = c \Rightarrow g$ surjectivă.

6) Consecință a lui 4) şi 5).

7) $f(n) = n + 1$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$ şi $g(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ n - 1, & n \geq 1. \end{cases}$

f este injectivă dar nu este surjectivă, g este surjectivă dar nu este injectivă.
$g \circ f = 1_{\mathbf{N}}$ = bijectivă.

8) Dacă f este injectivă, fixăm $x_0 \in A$ şi definim $r : B \to A$ prin

$$r(y) = \begin{cases} x, & \text{dacă } y \in f(A) \\ x_0, & \text{dacă } y \in B - f(A) \end{cases}$$

$(r \circ f)(x) = r(f(x)) = r(y) = x = 1_A(x)$, $(\forall) x \in A$, deci $r \circ f = 1_A$.

Reciproc, dacă $r \circ f = 1_A \Rightarrow r \circ f$ este bijectivă $\Rightarrow r \circ f$ injectivă $\Rightarrow f$ injectivă.

Scanned with OKEN Scanner

9) Dacă f este surjectivă, definim o funcție $S : B \to A$ astfel
$S(y)$ = un unic x din $f^{-1}(\{y\})$.
$(f \circ S)(y) = f(S(y)) = f(x) = y = 1_B(y)$, $(\forall) y \in B$, deci $f \circ S = 1_B$.
Reciproc, dacă $f \circ S = 1_B$ = bijectivă $\Rightarrow f \circ S$ = surjectivă $\Rightarrow f$ = surjectivă.

10) Definim $f_1 : A \to f(A)$ prin $f_1(x) = f(x)$, $(\forall) x \in A$ şi $i : f(A) \to B$, $i(y) = y$, $(\forall) y \in f(A)$. i se numeşte aplicația de incluziune. f_1 este surjectivă iar i este injectivă

$$(i \circ f_1)(x) = i(f_1(x)) = i(f(x)) = f(x), \ (\forall) x \in A \Rightarrow (i \circ f_1) = f.$$

3. 1) Fie $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \Leftrightarrow f(x) \in B_1$ sau $f(x) \in B_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

2) Fie $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \Leftrightarrow f(x) \in B_1$ şi $f(x) \in B_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_1)$.

3) Fie $y \in f(A_1 \cup A_2) \Leftrightarrow (\exists) x \in A_1 \cup A_2$ şi $y = f(x) \Leftrightarrow (x \in A_1$ şi $y = f(x))$ sau $(x \in A_2$ şi $y = f(x)) \Leftrightarrow y \in f(A_1)$ sau $y \in f(A_2) \Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

4) Fie $y \in f(A_1 \cap A_2) \Rightarrow (\exists) x \in A_1 \cap A_2$ şi $y = f(x) \Rightarrow (x \in A_1$ şi $y = f(x))$ şi $(x \in A_2$ şi $y = f(x)) \Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

5) Dacă f este injectivă, definim $f_1 : A \to f(A)$, prin $f_1(x) = f(x)$, $(\forall) x \in A$, şi $i : f(A) \to B$, $i(y) = y$, $(\forall) y \in f(A)$, $f = i \circ f_1$; f_1 este bijectivă. Fie $g = f_1^{-1}$
$\Rightarrow f_1 = g^{-1}$, $f(A_1 \cap A_2) = f_1(A_1 \cap A_2) = g^{-1}(A_1 \cap A_2) = g^{-1}(A_1) \cap g^{-1}(A_2) =$
$= f_1(A_1) \cap f_1(A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
Reciproc, dacă are loc egalitatea, demonstrăm că f este injectivă. Fie x_1, $x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$. Luăm $A_1 = \{x_1\}$, $A_2 = \{x_2\} \Rightarrow A_1 \cap A_2 = \varnothing$; $f(A_1 \cap A_2) = f(\varnothing)$
$= \varnothing = f(A_1) \cap f(A_2) = = \{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, deci f este injectivă.

6) $f(\mathbf{R}) = [-2, +\infty)$, $f(-\infty, 0) = (-2, +\infty)$,

$$f^{-1}(10, +\infty) = \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(\frac{6}{5}, +\infty\right), \ f^{-1}[0, +\infty) = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup (1, +\infty).$$

7) $g(\mathbf{Z}) = 5\mathbf{Z}$, $g(\mathbf{N}) = 5\mathbf{N}$, $g^{-1}(\mathbf{Z}) = g^{-1}(5\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$.

8) $f(\mathbf{Z}) = \{-1, 1\}$, $f^{-1}(\{1\}) = 2\mathbf{Z}$, $f^{-1}(\{-1\}) = 2\mathbf{Z} + 1$, $f^{-1}(\{0\}) = \varnothing$.

4. Funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^3 + 5$ este bijectivă. Din $f \circ f = g$ bijectivă $\Rightarrow f$ injectivă şi f surjectivă. Deci f este bijectivă.

5. 1) Notăm $I_1 = (-\infty, 0]$, $I_2 = (0, +\infty)$.

$$f \text{ este injectivă} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ injectivă pe } I_1 \\ f \text{ injectivă pe } I_2 \\ f(I_1) \cap f(I_2) = \varnothing \end{cases}$$

$f(I_1) = [-2, +\infty)$. Dacă $m < 0 \Rightarrow f(I_2) = (-\infty, n)$. f injectivă pe I_2.
f este injectivă pentru $m < 0$ şi $n \leq -2$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $m = 0 \Rightarrow f(x) = n$, $(\forall)\, x > 0 \Rightarrow f$ nu este injectivă.

Pentru $m > 0 \Rightarrow f(I_2) = (n, +\infty)$ și $f(I_1) \cap f(I_2) \neq \emptyset$, deci f nu este injectivă.

Deci f injectivă $\Leftrightarrow m < 0$ și $n \leq -2$.

2) f surjectivă $\Leftrightarrow f(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \Leftrightarrow f(I_1 \cup I_2) = \mathbf{R} = f(I_1) \cup f(I_2)$.

Dacă $m < 0$ și $n \geq -2 \Rightarrow f$ surjecție.

Dacă $m \geq 0$, f nu este surjecție.

3) f este bijectivă $\Leftrightarrow m < 0$ și $n = -2$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 0 \\ mx - 2, & x > 0 \end{cases}, \qquad f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{m}, & x < -2 \\ -\sqrt{x+2}, & x \geq -2 \end{cases}$$

6. 1) $[-1, 1]$; 2) $[-1, +\infty)$; 3) $\mathbf{R}$; 4) $[0, 1]$; 5) $\mathbf{N}$; 6) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$;

7) $t(x) = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6)$

Notăm $y = x^2 + 5x + 4$; $f_1(y) = y^2 + 2y$;

$x^2 + 5x + 4 - y = 0 \Rightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -\frac{9}{4}$

$$t(\mathbf{R}) = f_1\left(\left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)\right) = [-1, +\infty).$$

7. 1) $\operatorname{Im} f = \mathbf{R} - \{1\}$. Deci $a = 1$.

2) Fie $x_1, x_2 \in \mathbf{R} - \{1\}$ a.î. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{x_1 + 5}{x_1 - 1} = \dfrac{x_2 + 5}{x_2 - 1} \Rightarrow x_1 = x_2$, deci f este injectivă.

Fie $y \in \mathbf{R} - \{1\}$. $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{x+5}{x-1} = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y+5}{y-1} \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ deci f este surjectivă.

8. 1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x}, & x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1}, & x \geq 0 \end{cases}$

Dacă $x_1 < x_2 < 0$ sau $0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Cum $f((-\infty, 0)) = (-1, 0)$ iar $f([0, +\infty)) = [0, 1) \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $\mathbf{R}$ $\Rightarrow f$ injectivă.

2) $f(\mathbf{R}) = f((-\infty, 0) \cup [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) \cup f([0, +\infty)) = (-1, 0) \cup [0, 1) = (-1, 1)$.

3) f este surjectivă ($\operatorname{Im} f = (-1, 1)$) și cum f este injectivă $\Rightarrow f$ este bijectivă.

Scanned with OKEN Scanner

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x}, & x\in(-1,0)\\ \dfrac{x}{1-x}, & x\in[0,1)\end{cases}$$

4) $|a+b|\le|a|+|b|$, $(\forall)\, a, b\in \mathbf{R}$ (inegalitatea triunghiului).

$$f(|a+b|)=\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le f(|a|+|b|)=\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}\ \text{q.e.d.}$$

9. Dacă $a<0\Rightarrow f((-\infty,0))=(5,+\infty)$ şi $f([0,+\infty))=(-\infty,0]$. Din f strict descrescătoare pe $(-\infty,0)$ şi pe $[0,+\infty)\Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $\mathbf{R}$. Cazul când $a\ge 0$ nu convine.

10. $(x-3)^2+(y+2)^2+m-13\ge 0,\ (\forall)\, x, y\in\mathbf{R}\Leftrightarrow m-13\ge 0\Leftrightarrow m\ge 13.$

11. $f_m(x)=m(x^2-4x+4)+3x^2-7x+1=m(x-2)^2+3x^2-7x+1$

$f_m(2)=-1\Rightarrow M(2,-1)$ este punct fix.

12. Fie $(x_0,y_0)\in G_f\cap G_g\Rightarrow f(x_0)=g(x_0)=y_0\Rightarrow x_0^2-3x_0+2=-x_0^2+7x_0\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x_0^2-10x_0+2=0\Leftrightarrow x_0^2-5x_0+1=0;\ x_0=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ şi $y_0=f(x_0)=g(x_0)$.

13. Calculăm Δ, P şi S.

$$\Delta=4m-3,\ P=\frac{1}{m^2+1}\ \text{şi}\ S=\frac{2m+1}{m^2+1}.$$

Dacă $m\in\left(-\infty,\dfrac{3}{4}\right)\Rightarrow x_1, x_2\in\mathbf{C}-\mathbf{R}$

Dacă $m=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\Delta=0, S>0, P>0\Rightarrow x_1=x_2=\dfrac{4}{5}>0$.

Dacă $m\in\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)\Rightarrow P>0$ şi $S>0\Rightarrow x_1, x_2\in(0,+\infty)$ şi $x_1\ne x_2$.

14. $\left.\begin{aligned}(x+y)^2=(z+t)^2\\ x^2+y^2=z^2+t^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow xy=zt$

Notăm $x+y=z+t=S$ şi $x\cdot y=z\cdot t=P$.

Ecuaţia de gradul 2 în u: $u^2-Su+P=0$ are rădăcinile u_1 şi $u_2\Rightarrow\{u_1,u_2\}=$

$=\{x,y\}=\{z,t\}\Rightarrow x^n+y^n=z^n+t^n,\ (\forall)\, n\in\mathbf{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

15. 1) $(2x^3 + x^2 - x) - m(x + 1) = 0$; $x_1 = -1$ este soluție.

2) $2x^2 - x - m = 0$, $x_2, x_3 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ 2 \cdot f(1) > 0 \\ -\frac{b}{2a} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{1}{8} \\ m < 1 \\ \frac{1}{4} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left[-\frac{1}{8}, 1\right)$.

16. $\Delta = 5m^2 - 2m - 15 \Rightarrow \begin{cases} y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{15 + 2m - 5m^2}{4} \\ x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{m-1}{2} \end{cases}$.

Locul geometric al vârfurilor parabolelor se determină eliminând pe m între cele 2 relații.

$m = 2x_v + 1 \Rightarrow 4y_v = -20x_v^2 - 16x_v + 12 \Rightarrow y = -5x^2 - 4x + 3$ este ecuația locului geometric căutat.

17. 1) $\frac{312 - 3}{990} + 2 + \frac{50}{99} = \frac{309 + 500 + 1980}{990} = \frac{2789}{990}$.

2) Dacă $n = k^2$, $k \in \mathbf{N}$ atunci $\sqrt{n} = k \in \mathbf{Q}$.

Dacă $\sqrt{n} \in \mathbf{Q}$, presupunem că $n \neq k^2$, $(\forall)\, k \in \mathbf{N}$.

$\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, b; $a \in \mathbf{N}^* \Rightarrow a = b \cdot \sqrt{n} \Rightarrow a^2 = b^2 \cdot n$, contradicție cu teorema fundamentală a aritmeticii.

Deci $n = k^2$, $k \in \mathbf{N}$.

3) Presupunem că $\sqrt[3]{2} = x \in \mathbf{Q} \Rightarrow x^3 - 2 = 0$.

$x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}^* \Rightarrow q \mid 1$ și $p \mid -2 \Rightarrow \frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2\}$. Cum aceste numere nu sunt soluții ale ecuației $\Rightarrow x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

Presupunem că $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \in \mathbf{Q} \Rightarrow x^3 = 6 + 6x \Rightarrow x^3 - 6x - 6 = 0$

$x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}^* \Rightarrow q \mid 1$ și $p \mid -6 \Rightarrow x = \frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$. Cum aceste numere nu sunt soluții ale ecuației rezultă că $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

4) Ridicând la pătrat vom obține: $2a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{6} = 0$.

Dacă $a \neq 0$ și $b \neq 0 \Rightarrow \sqrt{6} = -\frac{2a^2 + 3b^2}{2ab} \in \mathbf{Q}$!

Scanned with OKEN Scanner

Deci $a = 0$ sau $b = 0$. Dacă $a = 0 \Rightarrow b\sqrt{3} = 0 \Rightarrow b = 0$.

Dacă $b = 0 \Rightarrow a\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = 0$.

5) Dacă $\frac{1}{a} \in \mathbf{Q} \Rightarrow a \in \mathbf{Q}$! Deci $\frac{1}{a} \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

6) $a_1 - a_2 = \sqrt{2} \cdot (b_2 - b_1)$. Dacă $b_1 \neq b_2 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} \in \mathbf{Q}$!

Deci $b_1 = b_2 \Rightarrow a_1 = a_2$.

18. $2n < \sqrt{4n^2 + 3} < 2n + 1$, $(\forall)\, n \geq 1 \Rightarrow [\sqrt{4n^2 + 3}] = 2n$; $(\forall)\, n \geq 2$ avem:

$2n < \sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1} < 2n + 1$ şi egalitatea dată se verifică pentru $n = 1$.

Deci ea are loc, $(\forall)\, n \geq 1$.

19. Inegalitatea este echivalentă cu:

$$(b + c - a)^2 + (a + c - b)^2 + (a + b - c)^2 + \frac{3}{4} \leq |a + b + c|$$

Notăm $b + c - a = x$; $a + c - b = y$; $a + b - c = z$, atunci $x + y + z = a + b + c$.
Inegalitatea este echivalentă cu:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{3}{4} \leq |x + y + z| \qquad (1)$$

Din inegalitatea lui Cauchy-Schwarz obţinem:

$$|x + y + z| = |x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1| \leq \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 3} \quad (2)$$

Notăm $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \alpha$ şi utilizând (1) şi (2) rezultă

$$\alpha^2 + \frac{3}{4} \leq \sqrt{3} \cdot \alpha \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \alpha + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (2\alpha - \sqrt{3})^2 \leq 0 \text{ şi cum}$$

$$(2\alpha - \sqrt{3})^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |x + y + z| = \frac{3}{2} \text{ şi}$$

$|x + y + z| = \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} \Rightarrow x = y = z \Rightarrow a = b = c$. Deci inegalitatea

dată devine $3a^2 + \frac{3}{4} \leq 3|a| \Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{4} - |a| \leq 0 \Leftrightarrow \left(|a| - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow |a| = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = b = c = \frac{1}{2}$ sau $a = b = c = -\frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

20. Notăm $y+2=t \Rightarrow y=t-2$.

Sistemul va deveni: $\begin{cases} x^2+3t^2-16t=0 \\ x\cdot t=16 \end{cases}$

$x=0$ nu verifică a doua relație $\Rightarrow x\neq 0$

$t=\frac{16}{x}$; $x^4-256x+3\cdot 256=0 \Leftrightarrow (x-4)^2\cdot(x^2+8x+48)=0 \Rightarrow x_1=x_2=4$;

$x_{3,4}\notin \mathbf{R} \Rightarrow t=4 \Rightarrow y=2$. Deci sistemul are unica soluție $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$.

21. 1) Polinomul este de grad impar $\Rightarrow$ el are cel puțin o rădăcină reală x_0.

Dacă $x_0>0 \Rightarrow 3x_0^5+17x_0^2+x_0+7>0$, contradicție. $P(0)=7\neq 0$.

Deci $x_0<0$.

2) Ecuația este echivalentă cu: $(x^2+x+1)^2=3x^3+x$

Dacă $x\in \mathbf{R}$ și $x\leq 0 \Rightarrow 3x_0^3+x_0\leq 0$ și $(x_0^2+x_0+1)^2>0$ deci egalitatea nu are loc.

3) $x_1=1$, $x_{2,3}=2\pm\sqrt{5}$.

4) $(x-1)^2\cdot(x-2)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\{1\}\cup[2,+\infty)$.

22. 1) $x_1=x_2=x_3=1$, $x_4=x_5=-1$

2) $x_1=x_2=\frac{5}{2}$

3) $x_1=x_2=-\frac{7}{3}$

4) $x_1=x_2=1$, $x_3=x_4=x_5=-1$

5) $x_1=x_2=\frac{3}{2}$; $x_3=x_4=x_5=-1$.

23. 1) $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=-3$, $x_{4,5}\in \mathbf{C}-\mathbf{R}$.

2) $(x^2-x-42)(x^2-x-6)+180=0$

Notăm $y=x^2-x-6$. Ecuația va fi: $y^2-36y+180=0 \Rightarrow y_1=6$; $y_2=30 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{145}}{2}$; $x_3=4$, $x_4=-3$.

Scanned with OKEN Scanner

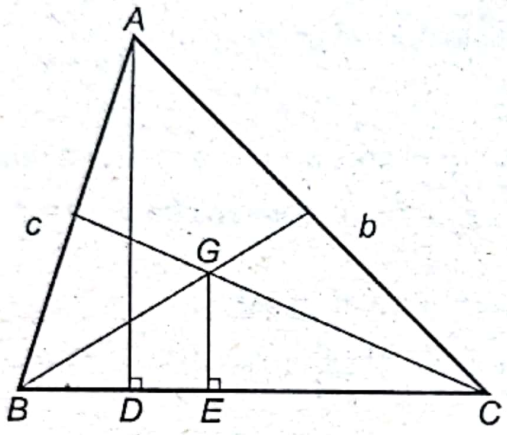
24. Să presupunem că $(\exists)x \in \mathbf{Z}$ a.î. $f(x) \in \mathbf{Z}$.

Se observă că $x^4 + 2x^2 + 1 < x^4 + 3x^2 + 7 < x^4 + 6x^2 + 9$, deci $(x^2 + 1)^2 < x^4 + 3x^2 + 7 < (x^2 + 3)^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 < f(x) < x^2 + 3$, deoarece $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 7} > 0$.

Deoarece $x \in \mathbf{Z}$, rezultă că $x^2 + 1$ şi $x^2 + 3 \in \mathbf{N}$ şi deoarece $f(x) \in \mathbf{Z}$, rezultă $f(x) = x^2 + 2$.

Deci $[f(x)]^2 = (x^2 + 2)^2 \Leftrightarrow x^4 + 3x^2 + 7 = x^4 + 4x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$, absurd.

25.



$$\left.\begin{aligned} BD^2 &= c^2 - AD^2 \\ DC^2 &= b^2 - AD^2 \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

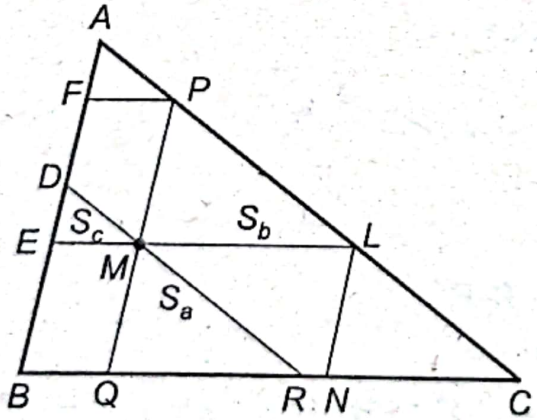
$$BD^2 - DC^2 = c^2 - b^2$$

$$\left.\begin{aligned} BE^2 &= BG^2 - GE^2 \\ EC^2 &= CG^2 - GE^2 \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(BE^2 - EC^2) = 3(BG^2 - CG^2) = 3\left[\frac{4}{9}\cdot\frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4} - \frac{4}{9}\left(\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}(3c^2 - 3b^2) = c^2 - b^2.$$

26.



$PQ \parallel AB$, $EL \parallel BC$, $DR \parallel AC$

$PF \parallel BC$, $LN \parallel AB$.

Din paralelogramele formate rezultă că $\Delta DEM \equiv \Delta AFP$, $\Delta MQR \equiv \Delta LNC$.

De asemenea, avem: $\Delta AFP \sim \Delta PML \sim \Delta LNC \sim \Delta ABC$.

Fie r_1, r_2, r_3 razele cercurilor înscrise în ΔAFP, ΔPML, ΔLNC şi r raza cercului înscris în ΔABC

$$\Rightarrow \frac{r_1}{r} = \frac{AP}{AC};\ \frac{r_2}{r} = \frac{PL}{AC} \text{ şi } \frac{r_3}{r} = \frac{LC}{AC} \Rightarrow \frac{r_1 + r_2 + r_3}{r} =$$

$$= \frac{AP + PL + LC}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1 \Rightarrow r_1 + r_2 + r_3 = r \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{S_a}{S}=\left(\frac{r_3}{r}\right)^2;\ \frac{S_b}{S}=\left(\frac{r_2}{r}\right)^2;\ \frac{S_c}{S}=\left(\frac{r_1}{r}\right)^2$$

Inegalitatea dată este echivalentă cu următoarea:

$$\sqrt{\frac{S}{S_a}}+\sqrt{\frac{S}{S_b}}+\sqrt{\frac{S}{S_c}}\geq 9 \Leftrightarrow \frac{r}{r_1}+\frac{r}{r_2}+\frac{r}{r_3}\geq 9 \qquad (2)$$

Din (1) și (2) obținem: $(r_1+r_2+r_3)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)\geq 9$ care este adevărată conform inegalității lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz.

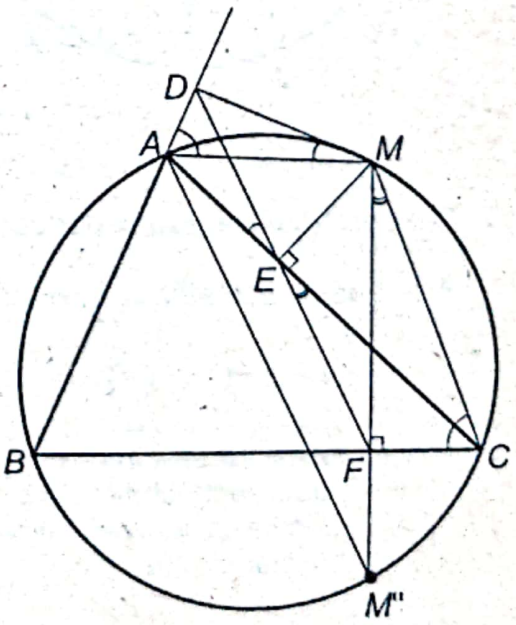
27. 1) Fie R raza cercului dat. Unim pe O cu P și ducem $MO' \parallel OP$ unde $O' \in OA$.

Din asemănarea $\Delta AMO'$ cu ΔAPO obținem: $\frac{AM}{AP}=\frac{O'A}{OA}=\frac{MO'}{OP}=\frac{k}{k+1}$.

O, A sunt fixe și $O'M=\frac{k\cdot R}{k+1} \Rightarrow O'$ = punct fix $\Rightarrow M$ descrie cercul de centru O' și rază $\frac{R\cdot k}{k+1}$.

2) Fie D mijlocul segmentului $[BC] \Rightarrow D$ = punct fix.
Cum O = punct fix $\Rightarrow [OD]$ este fix. Fie G centrul de greutate al $\Delta ABC \Rightarrow$
$\Rightarrow G \in [AD]$ și $\frac{GD}{AD}=\frac{1}{3}$. Construim $GG' \parallel OA$ unde $G' \in OD \Rightarrow GG'=\frac{R}{3}$
și G' este punct fix $\left(G'D=\frac{OD}{3}\right) \Rightarrow G$ descrie un cerc de centru G' și rază $\frac{R}{3}$.

28. 1) Fie M un punct de pe cercul circumscris ΔABC și D, E, F proiecțiile lui M pe AB, AC, BC.



$$m(\widehat{AED})=m(\widehat{AMD})=90^\circ-m(\widehat{MAD})$$

$$m(\widehat{FEC})=m(\widehat{FMC})=90^\circ-m(\widehat{MCF})$$

Cum $m(\widehat{MAD})=m(\widehat{MCF})$ deoarece au același suplement rezultă că $\widehat{AED}\equiv\widehat{CEF} \Rightarrow$
$\Rightarrow D, E, F$ coliniare.

Scanned with OKEN Scanner

Notă. Dreapta *DF* se numeşte dreapta lui Simson.
Robert Simson (1687-1768), matematician scoţian a profesat la Glasgow.
Dreapta *DF* a fost prima dată menţionată de către Wallace în 1799.

Observaţie: Fie M' al doilea punct de intersecţie al dreptei MF cu cercul circumscris;

$$m(\widehat{AM'M}) = m(\widehat{ACM}) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{AM}).$$

Cum $MEFC$ inscriptibil $\Rightarrow m(\widehat{MCE}) = m(\widehat{MFE}) \Rightarrow m(\widehat{AM'F}) = m(\widehat{EFM}) \Rightarrow$

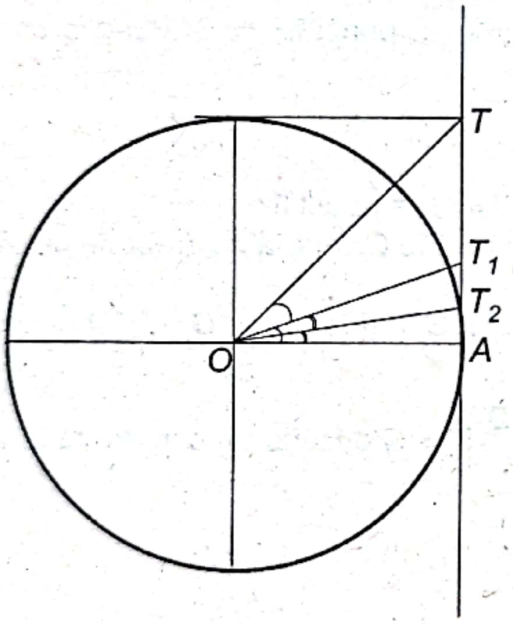
$\Rightarrow AM' \parallel DF$.

2) $MDAE$, $MEFC$ patrulatere inscriptibile şi D, E, F, coliniare $\Rightarrow$

$$m(\widehat{AED}) = m(\widehat{FEC}) \Leftrightarrow m(\widehat{AMD}) = 90^\circ - m(\widehat{MAD}) = m(\widehat{FMC}) = 90^\circ - m(\widehat{BCM})$$

$\Rightarrow m(\widehat{MAD}) = m(\widehat{MCB}) \Rightarrow MABC$ patrulater inscriptibil.

29.



$$m(\widehat{AOT}) = \frac{\pi}{4};\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = AT = 1.$$

Fie OT_1 bisectoarea unghiului $\widehat{AOT}$,...

OT_n bisectoarea unghiului $\widehat{AOT}_{n-1}$.

În ΔAOT aplicăm teorema bisectoarei:

$$\frac{T_1A}{T_1T} = \frac{OA}{OT} < 1 \Rightarrow T_1A = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^3} < \frac{1}{2}.$$

În ΔAOT_1 aplicăm teorema bisectoarei:

$$\frac{T_2A}{T_2T_1} = \frac{OA}{OT_1} < 1 \Rightarrow T_2A = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^4} < \frac{1}{2^2}$$

Din aproape în aproape deducem: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}} < \frac{1}{2^n}$, $(\forall) n \geq 1$.

Aplicând inegalitatea cunoscută:

$\sin x < x < \operatorname{tg} x$, $(\forall) x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ vom deduce: $\frac{\pi}{2^{n+2}} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}$, $(\forall) n \geq 1$.

Observaţie. Am preferat introducerea problemei în setul celor pentru clasa a IX-a deoarece, chiar fără o demonstraţie riguroasă prin inducţie matematică, elevul îşi dezvoltă raţionamentul inductiv. Desigur, o va demonstra riguros în clasa a X-a.

Scanned with OKEN Scanner

30. $x>\frac{2}{3}\Rightarrow 0<\frac{1}{x}<\frac{3}{2}\Rightarrow 0<\frac{\pi}{3x}<\frac{\pi}{2}$.

Inegalitatea este echivalentă cu: $\sqrt{1+x^2}>\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3x}}\Leftrightarrow 1+x^2>\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{3x}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+x^2>1+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{3x}\Leftrightarrow x>\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3x}\Leftrightarrow\frac{1}{x}<\operatorname{tg}\frac{\pi}{3x}$.

Dar $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3x}>\operatorname{tg}\frac{1}{x}>\frac{1}{x}$ deoarece $\alpha=\frac{1}{x}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $(\forall)\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ avem $\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha$.

31. $\frac{\pi}{2}<2<\pi$, $\pi<4<\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}<6<2\pi$ și $\frac{5\pi}{2}<8<3\pi$.

$\cos 6>0$ și $\cos 2<0$, $\cos 8<0$, $\cos 4<0$.

$2-\frac{\pi}{2}>8-\frac{5\pi}{2}\Leftrightarrow\pi>3$ deci $\cos 2<\cos 8$.

$4-\pi<\pi-2\Leftrightarrow 6<2\pi$ deci $\cos 4<\cos 2\Rightarrow\cos 4<\cos 2<\cos 8<\cos 6$.

32. $\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{1}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{2}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{3}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{6}$.

Cum $A+B+C=\pi\Rightarrow\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow 6\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\Rightarrow\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=6$.

Cum $3\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=2\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\Rightarrow\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=2$ și $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=3$, $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=1\Rightarrow\hat{A}=\frac{\pi}{2}$;

$\operatorname{ctg}B=\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}=\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}C=\frac{4}{3}$. Deci este posibil ca într-un ΔABC să existe relațiile date și anume într-un triunghi dreptunghic cu laturile proporționale cu 3, 4, 5.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a X-a

33. 1) $x>0$. Observăm că $2^{\log_5 x}=x^{\log_5 2}$ deoarece $\log_5 x=\log_5 2\cdot\log_2 x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 x=\dfrac{\log_5 x}{\log_5 2}$, reprezentând formula de schimbare a bazei. Ecuația

devine: $4\cdot 2^{\log_5 x}=8\Leftrightarrow 2^{\log_5 x}=2\Leftrightarrow \log_5 x=1\Leftrightarrow x=5$.

2) Funcția $f(x)=3^x+4^x$ este strict crescătoare.
$f(1)=7\Rightarrow x=1$ este unica soluție a ecuației.

3) Funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\log_2 x+3\cdot\log_2(x+3)$ este strict crescătoare.
Din $f(1)=6\Rightarrow x=1$ este unica soluție a ecuației.

4) Rezolvăm ecuația în necunoscuta 2^x vom obține soluțiile: $2^x=2$ și $2^x=11-x$.
Ecuația $2^x=2$ are soluția $x=1$.
Ecuația $2^x=11-x$ are soluția unică $x=3$ deoarece funcțiile $f(x)=2^x$, $g(x)=11-x$ au monotoniile: f = strict crescătoare iar g este strict descrescătoare.

5) Se impune condiția $x>0$.

Ecuația se rescrie: $\log_2\left(x+\dfrac{4}{x}\right)=4x-x^2-2$.

Conform inegalității mediilor avem:

$x+\dfrac{4}{x}\geq 2\cdot\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}}=4\Rightarrow \log_2\left(x+\dfrac{4}{x}\right)\geq 2$, egalitatea atingându-se pentru $x=2$.
$4x-x^2-2\leq 2$ deoarece $x^2-4x+4\geq 0\Leftrightarrow (x-2)^2\geq 0$, egalitatea având loc pentru $x=2$.
Deci $x=2$ este unica soluție a ecuației.

6) Se impune condiția $x^2-2x-1>0\Rightarrow x\in(-\infty,1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2},+\infty)$.

Ecuația devine $x^2-x-3=0\Rightarrow x_1=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$, $x_2=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Din $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}<1-\sqrt{2}\Rightarrow x_1=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ este soluție.

Din $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}<1+\sqrt{2}\Rightarrow x_2$ nu este soluție.

34. Se impune condiția $x>0$. Logaritmând în baza 10 obținem $\lg 4x\cdot\lg x=\lg 5^4\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lg x\cdot(\lg x+\lg 4)=4\lg 5$.

Scanned with OKEN Scanner

Notăm $\lg x = t \Rightarrow$ Ecuația devine:

$t^2 + t \cdot \lg 4 - 4 \lg 5 = 0$; $\Delta = (2 \lg 2 - 4)^2 = (4 - \lg 4)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_1 = 2 - \lg 4 = \lg 25 = \lg x \Rightarrow x_1 = 25$ sau

$t_2 = -2 = \lg 10^{-2} = \lg x \Rightarrow x_2 = 0{,}01$.

35. Se impune condiția $x > 0$.

Logaritmând în baza 2, vom obține $x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

36. 1) $2 < \sqrt{3}^{\sqrt{2}} < 3 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{2}} < 3 < 3^{\sqrt{2}}$

$2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} = 2^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \sqrt{2} < 3$ deoarece $8 < 9$.

Din $1 < \sqrt{2} \Rightarrow 3 < 3^{\sqrt{2}}$.

2) $4 < \sqrt{5}^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2 < \frac{\sqrt{3}}{2} \log_2 5 \Leftrightarrow 4 < \sqrt{3} \cdot \log_2 5$. Dar $\log_2 5 > 2{,}32$ și

$\sqrt{3} > 1{,}73 \Rightarrow \sqrt{3} \cdot \log_2 5 > 4{,}0136 > 4$.

$\sqrt{5}^{\sqrt{3}} < 5 \Leftrightarrow 5^{\frac{\sqrt{3}}{2}} < 5^1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \Leftrightarrow 3 < 4$ adevărat.

Deci b) este adevărată.

3) Arătăm că $21 < \sqrt{10}^{\sqrt{7}} < 22$

$21 < \sqrt{10}^{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \lg 21 < \sqrt{7} \cdot \frac{1}{2}$

Dar $\lg 21 < 1{,}3223$ și $\frac{\sqrt{7}}{2} > \frac{2{,}6458}{2} = 1{,}3229$

$\sqrt{10}^{\sqrt{7}} < 22 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{7}}{2} < \lg 22$

$\frac{\sqrt{7}}{2} < \frac{2{,}65}{2} = 1{,}325 < 1{,}34 < \lg 22$.

37. Inegalitatea este echivalentă cu:

$10^{\frac{p}{10}} < 2 < 10^{\frac{p+1}{10}} \Leftrightarrow 10^p < 2^{10} < 10^{p+1} \Rightarrow p = 3$.

Scanned with OKEN Scanner

38. $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2} \le \frac{1}{2}$, egalitatea având loc în $x=0$; $\log_2(2x^2+\sqrt{2}) \ge \frac{1}{2}$, egalitatatea având loc în $x=0$. Deci unica soluție este $x=0$.

39. Împărțind prin $6^x \cdot 4^x$ inecuația vom obține:

$$\frac{2^x+3^x}{4^x}+\frac{3^x+4^x}{2^x}+\frac{2^x+4^x}{3^x} \le 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{2}{4}\right)^x+\left(\frac{4}{2}\right)^x\right]+\left[\left(\frac{3}{4}\right)^x+\left(\frac{4}{3}\right)^x\right]+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right] \le 6.$$

Cum $a+\frac{1}{a} \ge 2$, $(\forall)\, a>0$ rezultă că inecuația dată are unica soluție $x=0$.

40. Vom demonstra câteva dintre relații.

14) Pentru $n=1$, $\frac{1}{2} \le \frac{1}{\sqrt{4}}$ adevărată.

Presupunem că $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k} \le \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} \le \frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} \le \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

deoarece $(2k+1)^2\cdot(3k+4) \le (3k+1)(2k+2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12k^3+28k^2+19k+4 \le 12k^3+28k^2+20k+4$ adevărată.

15) Fie $a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}$

$$a_{n+1}-a_n = \frac{2}{(3n+4)(3n+3)(3n+2)} > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n,\ (\forall)\, n \ge 1$$

$$a_1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1 \Rightarrow 1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$$

sau demonstrația directă prind inducție.

20) Pentru $n=1$, $a_5 = 5 \vdots 5$ adevărat.

Dacă $a_{5k} \vdots 5$ atunci $a_{5k+5} = a_{5k+4}+a_{5k+3} = 2\cdot a_{5k+3}+a_{5k+2} =$

$= 3a_{5k+2}+2a_{5k+1} = (5a_{5k+1}+3\cdot a_{5k}) \vdots 5$.

21) *Metoda I*

Prin inducție.

Scanned with OKEN Scanner

Metoda II

$$E_1 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=E_2.$$

41. 1) $\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=$

$$=\frac{n(n+1)(2n+4)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

3) *Metoda I*

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k+2}.$$

Prin identificare obținem $A=\frac{1}{2}=C$ și $B=-1$.

Deci $S=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right).$

Metoda II

$$S=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

4) $S=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right]=$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right].$$

5) $S=\frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{4k^2-1}\right)=\frac{n}{4}+\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=$

$$=\frac{n}{4}+\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{4}+\frac{n}{4(2n+1)}.$$

6) $\sum_{k=1}^{n}(k+1-1)\cdot k!=\sum_{k=1}^{n}[(k+1)!-k!]=(n+1)!-1.$

Scanned with OKEN Scanner

7) $\sum_{k=1}^{n} k!\,[(k+1)^2-k]=\sum_{k=1}^{n}[(k+1)!(k+1)-k!\cdot k]=(n+1)!\cdot(n+1)-1.$

8) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1-1}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right]=1-\frac{1}{(n+1)!}.$

9) $\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{(2k^2-2k+1)(2k^2+2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k^2-2k+1}-\frac{1}{2k^2+2k+1}\right]=$

$=1-\frac{1}{2n^2+2n+1}=\frac{2n^2+2n}{2n^2+2n+1}.$

10) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k!(k+2)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k+2)!}=$

$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}.$

11) $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}\right]=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}}=$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$

12) $\sum_{k=1}^{n}\frac{\log_x a^{\frac{1}{k+1}}}{\log_x x^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\log_x a^{\frac{1}{k+1}}=$

$=\sum_{k=1}^{n}\log_x a^{\frac{1}{k(k+1)}}=\log_x\prod_{k=1}^{n}a^{\frac{1}{k(k+1)}}=\log_x a^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}}=$

$=\log_x a^{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{n}{n+1}\cdot\log_x a.$

13) $\frac{k^2+k-1}{(k+2)!}=\frac{A}{k!}+\frac{B}{(k+1)!}+\frac{C}{(k+2)!}=\frac{Ak^2+k(3A+B)+2A+2B+C}{(k+2)!}$

Identificând obținem: $A=1$, $B=-2$ şi $C=1$.

Deci $S=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{2}{(k+1)!}+\frac{1}{(k+2)!}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}.$

Scanned with OKEN Scanner

14) $\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=$

$=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}=\frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$.

15) $\sin 2^{n+1}\cdot\alpha=2\cdot\sin 2^n\alpha\cdot\cos 2^n\alpha=2^2\cdot\sin 2^{n-1}\alpha\cdot\cos 2^{n-1}\alpha\cdot\cos 2^n\alpha=$

$=2^3\cdot\sin 2^{n-2}\alpha\cdot\cos 2^{n-2}\alpha\cdot\cos 2^{n-1}\alpha\cdot\cos 2^n\alpha=\ldots=$

$=2^n\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 2^2\alpha\ldots\cos 2^n\alpha=$

$=2^{n+1}\cdot\sin\alpha\cdot(\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\ldots\cos 2^n\alpha)\Rightarrow P=\frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\cdot\sin\alpha}$.

16); 18). Notăm $S_1=\sum_{k=0}^{n-1}\sin(x+k\cdot h)$ și $S_2=\sum_{k=0}^{n-1}\cos(x+k\cdot h)$.

Metoda I

Se calculează $\sin\frac{h}{2}\cdot S_1$ și $S_2\cdot\sin\frac{h}{2}$.

Metoda II

Se calculează $S_2+i\cdot S_1$ și se obține $S_1=\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\cdot\sin\left(x+\frac{n-1}{2}h\right)$ și

$S_2=\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{n-1}{2}h\right)$.

17) În relația precedentă punem $h=x$ și obținem:

$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{n+1}{2}x$.

19) $\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{n+1}{2}x$.

Scanned with OKEN Scanner

20) $\sum_{k=1}^{n}\sin^2 kx=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\cos 2kx}{2}=\frac{1}{2}\left(n-\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx\right)$.

În egalitatea 19) luăm $x\to 2x$ şi vom obţine:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx=\frac{\sin nx}{\sin x}\cdot\cos(n+1)x \text{ deci } S=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin nx}{\sin x}\cdot\cos(n+1)x.$$

21) $\sum_{k=1}^{n}\cos^2 kx=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\cos 2kx}{2}=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin nx}{\sin x}\cdot\cos(n+1)x$.

22) $\sin 3\alpha=\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)\Rightarrow \sin^3\alpha=\frac{3}{4}\sin\alpha-\frac{1}{4}\cdot\sin 3\alpha$ deci

$$\sum_{k=1}^{n}\sin^3 kx=\frac{3}{4}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin kx-\frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin 3kx=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\frac{3nx}{2}}{\sin\frac{3x}{2}}\cdot\sin\frac{3(n+1)x}{2}.$$

23) $\cos 3\alpha=\cos\alpha\cdot(4\cos^2\alpha-3)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\Rightarrow$

$$\Rightarrow\cos^3\alpha=\frac{3}{4}\cos\alpha+\frac{1}{4}\cos 3\alpha$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\cos^3 kx=\frac{3}{4}\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos kx+\frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos 3kx=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{(n+1)x}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\frac{3nx}{2}}{\sin\frac{3x}{2}}\cdot\cos\frac{3(n+1)x}{2}.$$

24) $\operatorname{arctg}\frac{1}{k}-\operatorname{arctg}\frac{1}{k+1}=\operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1}\Rightarrow$

$$\Rightarrow S=\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{k}-\operatorname{arctg}\frac{1}{k+1}\right)=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}.$$

25) Notăm $m+n=k$. Vom face inducţie după k.

Pentru $k=2\Rightarrow m=n=1$ şi $1!\cdot 1!\mid 2!$ Adevărat. Presupunem afirmaţia adevărată pentru k şi o demonstrăm pentru $k+1$. Dacă $m+n=k+1\Rightarrow$ $\Rightarrow(m-1)+n=k$ şi $m+(n-1)=k$. Conform ipotezei de inducţie vom avea:

$(m-1)!\cdot n!\mid(m+n-1)!$ şi $m!\cdot(n-1)!\mid(m+n-1)!\Rightarrow$

$m!\cdot n!\mid(m+n-1)!\cdot m$ şi $m!\cdot n!\mid(m+n-1)!\cdot n\Rightarrow m!\cdot n!\mid(m+n)!$

Scanned with OKEN Scanner

42. 1) Verificare $n = 1$, $a_1 = 3 + 1 = 4$;
Presupunem că $a_k = 3^k + 1$

$$a_{k+1} = 3 \cdot a_k - 2 = 3^{k+1} + 3 - 2 = 3^{k+1} + 1.$$

Deci $a_n = 3^n + 1$, $(\forall) n \geq 1$.

2) Verificare: $n = 1$, $a_1 = 5 - 4 = 1$
$n = 2$, $a_2 = 5^2 - 4^2 = 9$.

Presupunem că $a_l = 5^l - 4^l$, $(\forall) 1 \leq l \leq k$.

$$a_{k+1} = 9 \cdot a_k - 20 \cdot a_{k-1} = 9(5^k - 4^k) - 20 \cdot (5^{k-1} - 4^{k-1}) =$$

$$= 9 \cdot 5^k - 9 \cdot 4^k - 4 \cdot 5^k + 5 \cdot 4^k = 5^{k+1} - 4^{k+1}.$$

Conform principiului inducției matematice, varianta II, rezultă afirmația adevărată, $(\forall) n \geq 1$.

3) Afirmațiile *a*) – *g*) se demonstrează ușor.

h) *Metoda I*. Prin inducție.

Metoda II. Fie $u_n = q^n$ o progresie geometrică ce verifică relația de recurență dată.

$$q^{n+2} = q^{n+1} + q^n \Rightarrow q^2 = q + 1 \Leftrightarrow q^2 - q - 1 = 0$$

$q_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Deci $u_n = C_1 \cdot q_1^n + C_2 \cdot q_2^n$.

Determinăm C_1 și C_2 știind că $u_1 = 1$ și $u_2 = 1 \Rightarrow C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $C_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Deci $u_n = \dfrac{q_1^n - q_2^n}{\sqrt{5}}$, $(\forall) n \geq 1$.

i) $u_{n+5} = u_{n+4} + u_{n+3} = 2u_{n+3} + u_{n+2} = 3u_{n+2} + 2u_{n+1} =$
$= 5 \cdot u_{n+1} + 3 \cdot u_n = 8u_n + 5 \cdot u_{n-1}$.

Dar $u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \leq 2u_{n-1} \Rightarrow 2u_n \leq 4u_{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow u_{n+5} = 8u_n + 5u_{n-1} > 8u_n + 4u_{n-1} \geq 8u_n + 2u_n = 10u_n$. Deci $u_{n+5} > 10 \cdot u_n$.

Presupunem că $u_{n+5l} > 10^l \cdot u_n$; $u_{n+5(l+1)} = u_{n+5l+5} > 10 \cdot u_{n+5l} > 10^{l+1} \cdot u_n$.

j) Pentru $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ și $(\forall) k \geq 3$ acoperim cu numere de forma $5k + n$ toate numerele naturale mai mari decât 17.

Pentru $n = 2$, $a_{2+5k} > 10^k \cdot a_2 = 10^k > (2 + 5k)^2$, $(\forall) k \geq 3$.

Pentru $n = 3$, $a_{3+5k} > 10^k \cdot a_3 = 2 \cdot 10^k > (3 + 5k)^2$, $(\forall) k \geq 3$.

Pentru $n = 4$, $a_{4+5k} > 10^k \cdot a_4 = 3 \cdot 10^k > (4 + 5k)^2$, $(\forall) k \geq 3$.

Pentru $n = 5$, $a_{5+5k} > 10^k \cdot a_5 = 5 \cdot 10^k > (5 + 5k)^2$, $(\forall) k \geq 3$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $n = 6$, $a_{6+5k} > 10^k \cdot a_6 = 8 \cdot 10^k > (6 + 5k)^2$, $(\forall) k \geq 3$.

Deci $a_n > n^2$, $(\forall) n \geq 17$.

Valorile $1 \leq n \leq 16$ pentru care $a_n = n^2$ sunt: $n = 1$ şi $n = 12$.

43. $x^2 - x - 1 = 0$ este ecuaţia caracteristică a şirului şi

$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sunt rădăcinile sale $\Rightarrow a_n = C_1 \cdot q_1^n + C_2 \cdot q_2^n$,

$(\forall) n \in \mathbf{N}$; Din $a_0 = 1$ şi $a_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n = \frac{q_1^n + q_2^n}{2}$.

Scriind primii termeni ai şirului: $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, 9$ observăm că $a_0, a_3, a_6 \in \mathbf{N}$. Vom demonstra prin inducţie varianta II, că $a_{3k} \in \mathbf{N}$, $(\forall) k \in \mathbf{N}$.

$a_0, a_3 \in \mathbf{N}$. Presupunem că $a_{3n} \in \mathbf{N}$, $0 \leq n \leq 3k$

$$a_{3k+3} = \frac{q_1^{3k+3} + q_2^{3k+3}}{2} = \frac{1}{2}\left[(q_1^{3k} + q_2^{3k}) \cdot (q_1^3 + q_2^3) - q_1^3 \cdot q_2^3 \cdot (q_1^{3k-3} + q_2^{3k-3})\right]$$

$q_1^3 + q_2^3 = 4$ şi $q_1 \cdot q_2 = -1 \Rightarrow a_{3k+3} \in \mathbf{N}$.

Deci $a_{3k} \in \mathbf{N}$, $(\forall) k \in \mathbf{N}$, pentru $m = 3$.

44. 1) Fie $x_n = q^n$ o soluţie a ecuaţiei.

$q^{n+1} = 3 \cdot q^n - 2 \cdot q^{n-1} \Rightarrow q^2 - 3q + 2 = 0 \Rightarrow q_1 = 1, q_2 = 2$.

Termenul general va fi: $x_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n$, $(\forall) n \geq 0$.

Determinăm constantele C_1 şi C_2.

$n = 0 \Rightarrow 1 = C_1 + C_2$

$n = 1 \Rightarrow 2 = C_1 + 2C_2 \Rightarrow C_2 = 1, C_1 = 0 \Rightarrow x_n = 2^n$, $(\forall) n \geq 0$.

2) Fie $x_n = q^n$ o soluţie a ecuaţiei.

$q^{n+2} = 4 \cdot q^{n+1} - 4 \cdot q^n \Rightarrow q^2 - 4 \cdot q + 4 = 0 \Rightarrow q_1 = q_2 = 2 \Rightarrow$

$x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n \cdot 2^n$.

Determinăm constantele reale C_1 şi C_2 din condiţiile iniţiale.

$C_1 = 1$ şi $C_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_n = 2^n + n \cdot 2^{n-1}$, $(\forall) n \geq 0$.

Verificarea se poate face prin inducţie matematică (varianta II).

3) Fie $x_n = q^n$ o soluţie a ecuaţiei $\Rightarrow q^3 - 4q^2 + 6q - 4 = 0$ este ecuaţia caracteristică a şirului $\Rightarrow q_1 = 2$, $q_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

$$q_3 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

$$x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) + C_3 \cdot 2^{\frac{n}{2}}\left[\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right].$$

Determinăm constantele C_1, C_2, C_3 din condițiile inițiale

$$C_1 = \frac{5}{2},\ C_2 = \frac{1+11\cdot i}{4},\ C_3 = \frac{1-11i}{4}.$$

Deci $x_n = 5\cdot 2^{n-1} + 2^{\frac{n-2}{2}} \cdot \cos\frac{n\pi}{4} - 11\cdot 2^{\frac{n-2}{2}} \cdot \sin\frac{n\pi}{4}$, $(\forall)\, n \geq 0$.

4) Atașăm ecuația omogenă: $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$ ce are soluția generală $w_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n$.

Căutăm o soluție particulară a relației de recurență date (neomogene):

$$x_n^0 = an^2 + bn + c\ .$$

Înlocuind se determină: $a = b = -\frac{1}{2}$ și $c \in \mathbf{R}$.

Soluția generală a ecuației neomogene va fi:

$$x_n = w_n + x_0^n = C_1 + C_2 \cdot 2^n - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}.$$

Vom determina constantele C_1 și C_2 din condițiile inițiale: $x_0 = 0$, $x_1 = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow C_1 = -3$, $C_2 = 3$.

Deci $x_n = 3\cdot 2^n - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - 3$, $(\forall)\, n \geq 0$.

Verificarea se poate face prin inducție (varianta II).

5) Notăm $y_n = \frac{1}{x_n}$, $(\forall)\, n \geq 1$. Șirul asociat va fi:

$$2y_n = y_{n+1} + y_{n-1} \Leftrightarrow y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = 0\ .$$

Căutăm o soluție $y_n = q^n \Rightarrow q^2 - 2q + 1 = 0 \Rightarrow q_1 = q_2 = 1 \Rightarrow$

$$y_n = C_1 + n \cdot C_2;\ y_1 = 1,\ y_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 2C_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{2};\ C_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow y_n = \frac{3-n}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{1}{y_n} = \frac{2}{3-n},\ (\forall)\, n \geq 1.$$

6) Se arată prin inducție că $x_n > 0$, $(\forall)\, n \geq 1$.

Logaritmând în baza 2 relația dată se obține:

$$\log_2 x_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\log_2 x_n + \frac{1}{2}\cdot\log_2 x_{n-1},\ (\forall)\, n \geq 2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Notăm $\log_2 x_n \triangleq y_n$, $(\forall)\, n \geq 1$; $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

$y_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot y_n + \frac{1}{2} \cdot y_{n-1}$; Fie $y_n = q^n \Rightarrow$ Ecuația caracteristică a şirului

$(y_n)_{n\geq 1}$ va fi: $q^2 = \frac{1}{2} \cdot q + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - q - 1 = 0 \Rightarrow q_1 = 1$,

$q_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_n = C_1 + C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\begin{cases} C_1 - \frac{C_2}{2} = 0 \\ C_1 + \frac{C_2}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3}, C_2 = \frac{4}{3} \Rightarrow y_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow x_n = 2^{y_n}, (\forall)\, n \geq 1.$$

45. 1) Fie $\varnothing \neq M \subset \mathbf{N}$. Definim mulțimea $A = \{y \in \mathbf{N} \mid y \leq x,\ (\forall)\, x \in M\}$.

Observăm că $A \neq \mathbf{N}$. În caz contrar, $(\exists) b \in M$ şi $b + 1 \in \mathbf{N} = A \Rightarrow$

$\Rightarrow b + 1 < b$! Dacă $A \neq \mathbf{N}$. $0 \in A$, căci $0 \leq x$, $(\forall)\, x \in M$. Dacă $(\forall)\, a \in A$

$\Rightarrow a + 1 \in A$ atunci $A = \mathbf{N}$ (conform axiomei inducției matematice). Deci

$(\exists) a \in A$ astfel încât $a + 1 \notin A$. Evident $a \leq x$, $(\forall)\, x \in M$. Arătăm că a este prim element al mulțimii M.

Presupunem că $a \notin M$. Deci $a \neq x$, $(\forall)\, x \in M \Rightarrow a < x$, $(\forall)\, x \in M \Rightarrow$

$\Rightarrow a + 1 \leq x$, $(\forall)\, x \in M \Rightarrow a + 1 \in A$!

Deci $a \in M$ şi $a \leq x$, $(\forall)\, x \in M$.

2) Fie $M \subset \mathbf{N}$, $M \neq \varnothing$ şi $(\exists) b \in \mathbf{N}$, $x \leq b$, $(\forall)\, x \in M$.

Considerăm $B = \{y \in \mathbf{N} \mid x \leq y,\ (\forall)\, x \in M\}$. Conform rezultatului precedent (teorema de bună ordonare) $(\exists) a \in B$ prim element. Se verifică uşor că a este ultim element în M.

3) Vom demonstra prin inducție matematică, varianta II.

Pentru $n = 1$; $x + \frac{1}{x} \in \mathbf{Q}$, adevărat.

Presupunem că $x^l + \frac{1}{x^l} \in \mathbf{Q}$, $1 \leq l \leq k$.

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) \in \mathbf{Q}.$$

Deci afirmația are loc, $(\forall)\, n \geq 1$.

4) $8 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1$; $9 = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 0$; $10 = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2$

Presupunem că afirmația are loc pentru $k \geq 8 \Rightarrow (\exists) p, q \in \mathbf{N}$ astfel încât $k = 3p + 5q \Rightarrow k + 3 = 3(p + 1) + 5q$. Deci afirmația are loc, $(\forall)\, n \geq 8$.

Scanned with OKEN Scanner

5) $a_1 = 1 \Rightarrow a_1 \geq 1$.
Dacă $a_1, a_2 > 0$ și $a_1 \cdot a_2 = 1 \Rightarrow (a_1 + a_2)^2 = (a_1 - a_2)^2 + 4a_1a_2 =$
$= (a_1 - a_2)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow a_1 + a_2 \geq 2$.
Presupunem că afirmația este adevărată pentru n.
Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} > 0$ și $a_1 \cdot a_2 \ldots a_n \cdot a_{n+1} = 1$.
Dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n+1} = 1 \Rightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} = n + 1 \geq n + 1$.
Dacă $a_k < 1$, $1 \leq k \leq n + 1 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 \ldots a_{n+1} < 1$!
Dacă $a_k > 1$, $1 \leq k \leq n + 1 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 \ldots a_{n+1} > 1$!
Dacă $(\exists) a_i, a_j, a_i < 1$ și $a_j > 1$, printr-o reindexare putem presupune că
$a_1 < 1$ și $a_2 > 1 \Rightarrow 1 - a_1 > 0$ și $a_2 - 1 > 0 \Rightarrow a_1 + a_2 > 1 + a_1 \cdot a_2$.
$(a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 \ldots a_n \cdot a_{n+1} = 1 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} > n \Rightarrow$
$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} > 1 + a_1 \cdot a_2 + a_3 + \ldots + a_{n+1} > n + 1$.
Deci afirmația are loc, $(\forall) n \geq 1$.

6) $x_1 \cdot x_2 \ldots x_n = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \ldots \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_1} = 1 \overset{5)}{\Rightarrow} x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$ unde

$x_1 = \frac{a_1}{a_2}, \ldots, x_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$ și $x_n = \frac{a_n}{a_1}$.

7) Presupunem că $(\exists) n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ astfel încât $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \in \mathbf{N} \Rightarrow$
$(\exists) k \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $2^k \leq n < 2^{k+1}$.
Notăm cu P produsul numerelor impare mai mici sau egale cu $n \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{k-1} \cdot P \cdot S \in \mathbf{N} \Rightarrow \frac{P}{2} \in \mathbf{N}$, contradicție.

8) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^m} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) +$

$+ \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{m-1} + 1} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1} + 2^{m-1}}\right) >$

$> \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \frac{2^3}{2^4} + \ldots + \frac{2^{m-1}}{2^m} = \frac{m}{2}$.

Aplicând teorema lui Arhimede $\Rightarrow (\exists) m \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $m > 2\alpha$. Punem

$n = 2^m \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} > \alpha$.

9) Considerăm numărul $M = n! + 1 > 1$.
M admite un divizor prim p. Dacă $p \leq n \Rightarrow p \mid n!$ și cum $p \mid n! + 1 \Rightarrow p \mid 1$ contradicție. Deci $p > n$.

Scanned with OKEN Scanner

46. 1) Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]-[nx].$$

Arătăm că $T=\frac{1}{n}$ este perioadă a lui f.

$$f\left(x+\frac{1}{n}\right)=\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]+[x+1]-[nx+1]=$$

$$=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]-[nx]=f(x).$$

Dacă $x\in\left[0,\frac{1}{n}\right)\Rightarrow f(x)=0$. Cum f este periodică de perioadă $T=\frac{1}{n}\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=0,\ (\forall)\,x\in\mathbf{R}$.

Notă. Identitatea se datorează matematicianului francez Ch. Hermite.

2) Notăm $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0.$$

Șirul $(a_n)_n$ fiind strict crescător rezultă că inegalitatea nu poate fi demonstrată direct prin inducție.

Fie $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\xrightarrow[n]{}\ln 2$

$a_n=x_{2n}-x_n+\ln 2\xrightarrow[n]{}\ln 2<\frac{7}{10}$ deoarece $2^{10}<e^7$.

Definim șirul $b_n=a_n+\frac{k}{n}$ și determinăm $k>0$ astfel încât șirul $(b_n)_n$ este descrescător.

$$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}-a_n+\frac{k}{n+1}-\frac{k}{n}=\frac{n(1-4k)-2k}{2n(n+1)(2n+1)}.$$

Dacă $1-4k\le 0\Rightarrow b_{n+1}<b_n,\ (\forall)\,n\ge 1$.

Deci pentru $k\ge\frac{1}{4}\Rightarrow(b_n)_n$ este strict descrescător.

Luăm $k=\frac{1}{4}\Rightarrow b_n=a_n+\frac{k}{4n}>a_n,\ (\forall)\,n\ge 1$ și $(b_n)_n$ este strict descrescător; $b_3=\frac{7}{10}$.

Scanned with OKEN Scanner

$$a_1 < a_2 < a_3 < b_3 = \frac{7}{10} > b_4 > b_5 > \ldots > b_n > \ldots \text{ şi}$$

$$a_n < b_n,\ (\forall) n \geq 1 \Rightarrow a_n < \frac{7}{10},\ (\forall) n \geq 1.$$

3) Se consideră ecuaţia $x^{2n} = 1 \Leftrightarrow x^{2n} = \cos 0 + i \sin 0 \Rightarrow$

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{2n} + i\sin\frac{2k\pi}{2n},\ 0 \leq k \leq 2n-1. \text{ Deci } X^{2n} - 1 =$$

$$= \prod_{k=0}^{2n-1}(X - X_k) = (X-1)(X+1)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(X - X_k)(X - \overline{X}_k) =$$

$$= (X^2-1)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left[X^2 - X(X_k + \overline{X}_k) + |X_k|^2\right] =$$

$$= (X^2-1)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos\frac{2k\pi}{2n} + 1\right).$$

Dar $X^{2n} - 1 = (X^2-1)(X^{2(n-1)} + X^{2(n-2)} + \ldots + X^2 + 1)$.

Prin egalarea celor 2 expresii obţinem:

$$X^{2(n-1)} + X^{2(n-2)} + \ldots + X^2 + 1 = \prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos\frac{2k\pi}{2n} + 1\right).$$

Punând $x = 1$ obţinem: $n = \prod_{k=1}^{n-1} 2^2 \cdot \sin^2\frac{k\pi}{2n} \Rightarrow$

$$\sqrt{n} = 2^{n-1}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n} \Rightarrow \prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

4) $x^{2n+1} = 1 \Rightarrow x^{2n+1} = \cos 0 + i\cdot\sin 0 \Leftrightarrow x_k = \cos\frac{2k\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2k\pi}{2n+1}$.

$0 \leq k \leq 2n$. Deci $X^{2n+1} - 1 = (X-1)\cdot\prod_{k=1}^{n}(X - X_k)(X - \overline{X}_k) =$

$$= (X-1)\cdot\prod_{k=1}^{n}\left[X^2 - X(X_k + \overline{X}_k) + |X_k|^2\right] = (X-1)\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - 2X\cos\frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right) =$$

$$= (X-1)(X^{2n} + X^{2n-1} + \ldots + X + 1) \Rightarrow \prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - 2X\cos\frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right) =$$

$$= X^{2n} + X^{2n-1} + \ldots + X + 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Luând $X = 1$ vom obține:

$$2n+1 = \prod_{k=1}^{n} 2^2 \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1} \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

5) Prin inducție nu putem demonstra.

Dar: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $(\forall) n \geq 1$ și $\frac{1}{\sqrt{3n+1}} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$.

Deci prin inducție se poate demonstra o inegalitate mai tare decât cea dată.

6) $x_n \leq 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 + 1 - \frac{1}{n} < 3$.

7) $x_n < \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$, $(\forall) n \geq 2$.

8) $x = 1$ este soluție, deoarece

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30} \cdot n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

Dacă $x \geq 2$ atunci $E_1 < 1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$ deci ecuația nu are soluții.
În concluzie, unica soluție a ecuației este $x = 1$.

47. 1) a) 181;
b) 121 = 181 – 60. (Numărul de numere multiplu de 33 cuprinse între 1 și 2 000 este 60).
c) 167 = 333 – 166 (scădem din numărul numerelor multiplu de 6 pe cel al numerelor multiplu de 12).

2) $144 < x < 225 \Rightarrow$ sunt 80 de numere.

3) Măsura unui unghi a unui poligon regulat este:

$$\frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \in \mathbf{N} \Rightarrow n \mid 360.$$

Dar $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \Rightarrow 360$ are 24 de divizori naturali. Cum $n \geq 3 \Rightarrow$ sunt 22 de poligoane.

4) 6 linii frânte.

5) a) $26^3 = 17\,576$
b) $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15\,600$
c) $26 \cdot 26 \cdot 5 = 3\,380$
d) $5 \cdot 25 \cdot 24 = 3\,000$

6) 30.

7) $3 \cdot 4^4 = 768$.

8) Problema este de a număra câte numere de 4 cifre distincte există. Cifra miilor o putem alege în 9 moduri (fără cifra 0), cifra sutelor o putem alege în 9 moduri, a zecilor în 8 moduri și a unităților în 7 moduri. Vom avea: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$ de numere.
Să le determinăm pe cele impare.

Scanned with OKEN Scanner

Cifra unităților o putem alege în 5 moduri, cea a miilor în 8 moduri, a sutelor în 8 moduri și a zecilor în 7 moduri. Vom avea: $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2\,240$ de numere impare.

9) $A_5^4 = 120$; $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72$.

10) $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$.
Să le determinăm pe cele pare. Avem 2 cazuri.
I. Dacă ultima cifră este 0 vom avea: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ de numere.
II. Dacă ultima cifră este pară și nenulă vom avea: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ de numere.
În total vor fi 420 de numere.

11) În total vor fi: 103.920 de numere.
600 de numere sunt între 53.000 – 59.999
2.520 de numere sunt între 60.000 – 99.999

$8! \cdot \frac{1}{2}$ numere de 6 cifre

8! numere de 7 cifre și 8! numere de 8 cifre.

În total vom avea: $8! \cdot \frac{5}{2} + 2520 + 600 = 103920$ de numere.

12) $C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ drepte; $C_{20}^3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1140$ de triunghiuri.

13) Vom avea atâtea cupluri de $(2 \cdot 5)$ câți factori de 5 intră în descompunerea lui 179! în factori primi. Exponentul lui 5 va fi:

$$\left[\frac{179}{5}\right] + \left[\frac{179}{5^2}\right] + \left[\frac{179}{5^3}\right] + \left[\frac{179}{5^4}\right] = 43.$$

14) 7!; $7! - 2 \cdot 6! = 6! \cdot 5 = 3\,600$.

15) În 2 moduri.

16) În 144 de moduri.
Femeile se pot așeza în 3! moduri.
La fiecare așezare a femeilor putem așeza în 4! moduri bărbații. Deci în total avem $3! \cdot 4! = 144$ de așezări.

17) a) 6 termeni;
b) $n + 1$ termeni.

18) $C_{10}^7 = C_{10}^3 = 120$.

19) Prin calcul direct.

20) a) 180 de termeni;
b) $b \cdot d \cdot s \cdot w$, $b \cdot f \cdot p \cdot u$.

21) $\frac{10!}{2^5}$.

22) 3^8.

Scanned with OKEN Scanner

23) *Metoda I*

$$(1+x+x^2)^7=[(1+x)+x^2]^7=C_7^0(1+x)^7+C_7^1(1+x)^6\cdot x^2+$$

$$+C_7^2(1+x)^5\cdot x^4+\ldots+C_7^7x^{14}.$$

Coeficientul lui x^3 va fi: $C_7^3+C_7^1\cdot C_6^1=35+42=77$.

Metoda II

$$(1+x+x^2)^7=\sum_{i+j+k=7}\frac{7!}{i!\cdot j!\cdot k!}1^i\cdot x^j\cdot x^{2k}$$

$j+2k=3\Rightarrow j=1,\ k=1;\ i=5$ sau $j=3,\ k=0,\ i=4$.
Deci coeficientul lui x^3 al dezvoltării va fi:

$$\frac{7!}{5!}+\frac{7!}{4!\cdot 3!}=42+35=77.$$

24) $(1+x+x^2)^8=\sum_{i+j+k=8}\frac{8!}{i!\cdot j!\,k!}\cdot 1^i\cdot x^j\cdot x^{2k}$

$j+2k=7\Rightarrow k=0,\ j=7,\ i=1;\ k=1,\ j=5,\ i=2;$
$k=2,\ j=3,\ i=3;\ k=3,\ j=1,\ i=4.$
Coeficientul lui x^7 va fi:

$$\frac{8!}{7!}+\frac{8!}{5!\cdot 2!}+\frac{8!}{2!\cdot 3!\cdot 3!}+\frac{8!}{3!\cdot 4!}=8+168+560+280=1\,016.$$

25) Coeficientul lui x^9 este: -910.

48. 1) $C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!};\ C_n^{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!};$

$$C_n^k+C_n^{k+1}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)}=\frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!\cdot(n-k)!}=$$

$$=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}=C_{n+1}^{k+1}.$$

2) $C_{n-1}^{n-1}=C_n^n=1;\ C_n^n+C_n^{n-1}=C_{n+1}^n;\ C_{n+1}^n+C_{n+1}^{n-1}=C_{n+2}^n,\ \ldots,$

$C_{p-1}^n+C_{p-1}^{n-1}=C_p^n$

3) $(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n$

4) și 5) $(1-1)^n=C_n^0-C_n^1+C_n^2\ldots+(-1)^n\cdot C_n^n=0$

Adunând aceste relații vom obține:

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots=2^{n-1}=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

6) $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}\cdot b + C_n^2 a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots + C_n^n \cdot b^n$

$(b+a)^n = C_n^0 b^n + C_n^1 b^{n-1}\cdot a + C_n^2 b^{n-2}\cdot a^2 + \ldots + C_n^n \cdot a^n$.

După înmulțirea celor 2 relații vom identifica coeficientul termenului ce conține pe $a^n \cdot b^n$.

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 .$$

7) $(1+x)^n \cdot (1+x)^m = (1+x)^{n+m} \Leftrightarrow$

$$(C_n^0 + C_n^1\cdot x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^p x^p + \ldots + C_n^n x^n)\cdot(C_m^0 + C_m^1 x + \ldots + C_m^p x^p + \ldots + C_m^m x^m) =$$

$$= (1+x)^{n+m} .$$

Identificând coeficienții termenului ce conține pe x^p în cei doi membri vom obține egalitatea.

8) $$\frac{1}{k+1}\cdot C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(k+1)!} = \frac{1}{n+1}\cdot C_{n+1}^{k+1}$$

deci $$\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1}\cdot\left[(1+1)^{n+1} - 1\right] = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} .$$

9) $C_p^k = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!} \in \mathbf{N}^* \Rightarrow k! \mid p(p-1)\ldots(p-k+1)$.

Dar $(1, p) = 1$, $(2, p) = 1$, …, $(k, p) = 1 \Rightarrow (k!, p) = 1$

deci $k! \mid (p-1)(p-2)\ldots(p-k+1) \Rightarrow p \mid C_p^k$.

10) Vom demonstra prin inducție după a.

Pentru $a = 1$, 0 se divide prin p.

Presupunem adevărată afirmația pentru a și o demonstrăm pentru $a + 1$.

$$(a+1)^p - (a+1) = (a^p - a) + C_p^1\cdot a^{p-1} + C_p^2\cdot a^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1}\cdot a \vdots p$$

aplicând ipoteza de inducție și afirmația 9).

Dacă $p \nmid a$ atunci $(a^{p-1} - 1) \vdots p$ (Fermat).

11) $$(1+i)^n = C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + C_n^4 + \ldots + i^n =$$

$$= (C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots) + i\cdot(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots)$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow (1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

Identificând vom obține: $$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots = 2^{n-1} .$$

Adunând aceste relații se obține relația de la punctul 11.

Scanned with OKEN Scanner

12) Fie $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

$\varepsilon^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$

$1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$ şi $1+\varepsilon=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

$1+\varepsilon^2=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$

$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^n$

$(1+\varepsilon)^n=C_n^0+\varepsilon\cdot C_n^1+\varepsilon^2\cdot C_n^2+C_n^3+\ldots+\varepsilon^n\cdot C_n^n$

$(1+\varepsilon^2)^n=C_n^0+\varepsilon^2\cdot C_n^1+\varepsilon\cdot C_n^2+C_n^3+\ldots+\varepsilon^{2n}\cdot C_n^n$ de unde prin adunare vom obține relația din enunț.

13) Pentru $n=1$ avem $(1-x)+(1+x)=2$.
Presupunem că $(1-x)^n+(1+x)^n\le 2^n$

$(1-x)^{n+1}+(1+x)^{n+1}=(1-x)^n\cdot(1-x)+(1+x)^n\cdot(1+x)\le 2\cdot(1-x)^n+2\cdot(1+x)^n=$

$=2[(1-x)^n+(1+x)^n]\le 2^{n+1}$.

14) $\sqrt{3}\cdot S=\operatorname{Im}(1+i\sqrt{3})^{6n}=0\Rightarrow S=0$.

49. Înlocuind $x_n=q^n$ în relația de recurență obținem:

$q^{n+2}=8\cdot q^{n+1}-15\cdot q^n\Rightarrow$

$q^2-8q+15=0\Rightarrow q_1=3, q_2=5$. Deci $x_n=3^n$ sau $x_n=5^n$, $(\forall)\, n\ge 0$.

50. Dacă $a\neq 1$

$S=(a+a^2+\ldots+a^n)+(a^2+a^3+\ldots+a^n)+\ldots+(a^{n-1}+a^n)+a^n=$

$=a\frac{a^n-1}{a-1}+a^2\cdot\frac{a^{n-1}-1}{a-1}+\ldots+a^{n-1}\cdot\frac{a^2-1}{a-1}+a^n\cdot\frac{a-1}{a-1}=$

$=\frac{1}{a-1}\cdot\left[n\cdot a^{n+1}-(a+a^2+\ldots+a^n)\right]=$

$=\frac{1}{a-1}\cdot\left[n\cdot a^{n+1}-a\frac{a^n-1}{a-1}\right]=\frac{a}{(a-1)^2}\cdot\left[na^{n+1}-(n+1)a+1\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

51. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} = \frac{1}{r} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) =$

$= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = \frac{nr}{r \cdot a_1 \cdot a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 \cdot a_{n+1}}.$

52. Vom demonstra câteva dintre afirmații.

7) Dacă $|z| = 1$, $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{|z|^2} = a - bi = \bar{z}$.

15) Dacă $z \in \mathbf{R} \Rightarrow z = a + 0i \Rightarrow \bar{z} = a - 0i = z$

Reciproc, dacă $z = \bar{z} \Rightarrow a + bi = a - bi \Rightarrow 2bi = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow z = a \in \mathbf{R}$.

16) Fie $P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_i = \mathbf{R}$, $0 \le i \le n$ și $z \in \mathbf{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{P(z)} = \overline{(a_n z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0)} =$

$= \bar{a}_n (\bar{z})^n + \bar{a}_{n-1} (\bar{z})^{n-1} + \ldots + \bar{a}_1 \cdot \bar{z} + \bar{a}_0 = P(\bar{z})$ deoarece

$\bar{a}_i = a_i$, $0 \le i \le n$.

17) $P(\bar{z}) = \overline{P(z)} = 0$.

53. 1) $\bar{z} = 2 - 3i$; $\frac{1}{z} = \frac{1}{2+3i} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$, $z^2 = -5 + 12i$, $|z| = \sqrt{13}$;

$z^3 = -46 + 9i$.

2) $\operatorname{Re} z_1 = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z_1 = \frac{1}{2}$

$\operatorname{Re} z_2 = -2$, $\operatorname{Im} z_2 = \frac{3}{2}$

$\operatorname{Re} z_2 = -1$, $\operatorname{Im} z_3 = 0$

3) Fie $w = z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2$; $\bar{w} = \bar{z}_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot \bar{z}_2 = w \Rightarrow w \in \mathbf{R}$ și

$w_n = z_1^n + \bar{z}_1^n$; $\bar{w}_n = \bar{z}_1^n + z_1^n = w_n \Rightarrow w_n \in \mathbf{R}$.

4) $z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow \frac{z^2+1}{z} = \frac{\bar{z}^2+1}{\bar{z}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2 \cdot \bar{z} + \bar{z} = \bar{z}^2 \cdot z + z \Leftrightarrow z \cdot \bar{z}(z - \bar{z}) - (z - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z - \bar{z})(z \cdot \bar{z} - 1) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$ sau $|z| = 1$. Deci $z \in \mathbf{R}^*$ sau $|z| = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

5) $z+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}+\frac{1}{\bar{z}^2}\Leftrightarrow\frac{z^3+z+1}{z^2}=\frac{(\bar{z})^3+\bar{z}+1}{(\bar{z})^2}$

$\Leftrightarrow z^3\cdot(\bar{z})^2+z\cdot(\bar{z})^2+(\bar{z})^2=(\bar{z})^3\cdot z^2+\bar{z}\cdot z^2+z^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\bar{z})^2\cdot z^2(z-\bar{z})+z\cdot\bar{z}(\bar{z}-z)+(\bar{z}-z)(\bar{z}+z)=0\Leftrightarrow$

$(z-\bar{z})(|z|^4-|z|^2)-2\operatorname{Re}z)=0\Leftrightarrow z=\bar{z}$ sau $t^2-t-2\operatorname{Re}z=0$ unde $|z^2|=t\in\mathbf{R}_+$.

Cum $\Delta=1+8\operatorname{Re}z<0\Rightarrow$ ecuația de gradul II nu are soluții reale t.

Deci $z=\bar{z}\Rightarrow z\in\mathbf{R}^*$ și $z\neq 0$.

6) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)+(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=$

$|z_1|^2+z_1\cdot\bar{z}_2+z_2\cdot\bar{z}_1+|z_2|^2+|z_1|^2-z_1\cdot\bar{z}_2-z_2\cdot\bar{z}_1+|z_2|^2=$

$=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

7) Se ridică la pătrat și se folosește proprietatea: $|z|^2=z\cdot\bar{z}$.

8) $|z-a|^2=|1-a\bar{z}|^2\Leftrightarrow(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=(1-a\bar{z})(1-\bar{a}z)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|z|^2-z\cdot\bar{a}-a\cdot\bar{z}+|a|^2=1-\bar{a}z-a\bar{z}+|a|^2\cdot|z|^2$ adevărată

deoarece $|a|^2=1$.

9) Se utilizează formula $|z|^2=z\cdot\bar{z}$ și se efectuează calculele.

10) $|(z_1+z_2)(z_2+z_3)|=|z_2(z_1+z_2+z_3)+z_1\cdot z_3|\leq$

$\leq|z_2|\cdot|z_1+z_2+z_3|+|z_1|\cdot|z_3|$.

Analog obținem: $|(z_2+z_3)(z_3+z_1)|\leq|z_3|\cdot|z_2+z_3+z_1|+|z_2|\cdot|z_1|$

$|(z_3+z_1)(z_1+z_2)|\leq|z_1|\cdot|z_3+z_1+z_2|+|z_3|\cdot|z_2|$.

Înmulțind cu 2 aceste inegalități și adunându-le cu identitatea de la punctul 9) se obține:

$(|z_1+z_2|+|z_2+z_3|+|z_3+z_1|)^2\leq(|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_1+z_2+z_3|)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|z_1+z_2|+|z_2+z_3|+|z_3+z_1|\leq|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_1+z_2+z_3|$.

Scanned with OKEN Scanner

54. Substituim în relația dată pe x respectiv cu:
$\varepsilon \cdot x, \varepsilon^2 \cdot x, \varepsilon^3 \cdot x, \varepsilon^4 \cdot x, \varepsilon^5 \cdot x, \varepsilon^6 \cdot x$ și vom obține:

$$f(\varepsilon \cdot x) + f(\varepsilon^3 \cdot x) = \varepsilon^k \cdot x^k$$
$$f(\varepsilon^2 \cdot x) + f(\varepsilon^4 \cdot x) = \varepsilon^{2k} \cdot x^k$$
$$f(\varepsilon^3 \cdot x) + f(\varepsilon^5 \cdot x) = \varepsilon^{2k} \cdot x^k$$
$$f(\varepsilon^4 \cdot x) + f(\varepsilon^6 \cdot x) = \varepsilon^{4k} \cdot x^k$$
$$f(\varepsilon^5 \cdot x) + f(x) = \varepsilon^{5k} \cdot x^k$$
$$f(\varepsilon^6 \cdot x) + f(\varepsilon \cdot x) = \varepsilon^{6k} \cdot x^k$$

Adunând relația dată cu aceste 6 relații vom obține:

$$2 \cdot [f(x) + f(\varepsilon \cdot x) + f(\varepsilon^2 \cdot x) + f(\varepsilon^3 \cdot x) + f(\varepsilon^4 \cdot x) + f(\varepsilon^5 \cdot x) + f(\varepsilon^6 \cdot x)] =$$
$$= x^k \cdot (1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \varepsilon^{3k} + \varepsilon^{4k} + \varepsilon^{5k} + \varepsilon^{6k}) \cdot$$

Dacă $7 \nmid k$ atunci $f(x) = -(\varepsilon^{2k} + \varepsilon^{3k} + \varepsilon^{6k}) \cdot x^k$.

Dacă $7 \mid k$ atunci $f(x) = \left(\frac{7}{2} - \varepsilon^{2k} - \varepsilon^{3k} - \varepsilon^{6k}\right) \cdot x^k = \frac{1}{2} \cdot x^k$.

Observație. Generalizare pentru p = prim, $p \geq 3$.

55. 1) Notăm $x = y - 3 \Rightarrow$ Ecuația redusă va fi:

$$y^3 - 9y + 28 = 0.$$

Dacă $y = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) - 9(\alpha + \beta) + 28 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + 3(\alpha + \beta)(\alpha \cdot \beta - 3) + 28 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = -28 \\ \alpha \cdot \beta = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = -28 \\ \alpha^3 \cdot \beta^3 = 27 \end{cases}.$$

Ecuația în necunoscuta t ce are soluțiile α^3 și β^3 este $t^2 + 28 \cdot t + 27 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow t_1 = -1, t_2 = -27 \Rightarrow \alpha^3 = -1, \beta^3 = -27$. Pentru $\alpha = -1$ și $\beta = -3$ se verifică condiția $\alpha \cdot \beta = 3 \Rightarrow y_1 = -4, y_2 = -\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2, y_3 = -\varepsilon_2 - 3\varepsilon_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1 = -7,\ x_2 = -1 + i\sqrt{3},\ x_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

2) Ecuația se rescrie:

$$(x^2 - x + \alpha)^2 - [x^2(2\alpha - 1) - 2x(\alpha + 2) + \alpha^2 + 8] = 0.$$

Determinăm $\alpha \in \mathbf{C}$ astfel ca paranteza a doua să fie pătrat perfect. Vom pune condiția ca $\Delta = 0 \Rightarrow (\alpha + 2)^2 - (2\alpha - 1)(\alpha^2 + 8) = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha^2 + 6\alpha - 6 = 0$.
$\alpha = 1$ este o soluție a acestei ecuații.
Deci ecuația dată se va scrie:

$$(x^2 - x + 1)^2 - (x - 3)^2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x + 4)(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow$$
$$x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = -\sqrt{2},\ x_3 = 1 + i\sqrt{3},\ x_4 = 1 - i\sqrt{3}.$$

3) *Metoda I*

$x = a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$. Deci $(a + bi)^2 = i \Leftrightarrow$

$$a^2 - b^2 + 2abi = i \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ridicăm ambele ecuații la pătrat, apoi le adunăm și obținem:

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ a^2-b^2=0 \end{cases} \Rightarrow 2a^2=1 \Rightarrow a^2=\frac{1}{2}=b^2 \Rightarrow a=b=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ sau}$$

$a=b=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (celelalte situații nu convin deoarece $a\cdot b=\frac{1}{2}>0$).

Deci $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Metoda II

$$x^2=i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\Rightarrow x_k=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2},$$

$$0\le k\le 1 \Rightarrow x_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{sau } x_1=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4) Analog cu 3).

5) Notăm $x^2=y\Rightarrow y^2=i\Rightarrow y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$ și $y_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Apoi se rezolvă ecuațiile: $x^2=y_1$, $x^2=y_2$.

56. 1) Căutăm soluții raționale $x=\frac{p}{q}$, $(q,p)=1$, $p,2\in\mathbf{Z}$, $q\neq 0\Rightarrow q\mid 3$ și $p\mid 7$

$$\Rightarrow q\in\{\pm1,\pm3\},\ p\in\{\pm1,\pm7\}\Rightarrow \frac{p}{q}\in\left\{\pm1,\pm\frac{1}{3},\pm7,\pm\frac{7}{3}\right\}.$$

Se verifică $x_1=\frac{7}{3}\Rightarrow P\ \vdots\ (3x-7)\Rightarrow P(x)=(3x-7)(x^2-x+1)=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1=\frac{7}{3},\ x_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ x_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

2) În mod analog se determină soluțiile ecuației:

$$x_1=-\frac{2}{5},\ x_2=-\frac{1}{3},\ x_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i,\ x_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i$$

3) $x_1=x_2=\frac{1}{4}$, $x_3=-\frac{2}{3}$, $x_4=i$, $x_5=-i$.

Scanned with OKEN Scanner

4) $x_1 = x_2 = x_3 = -1,\ x_4 = 1,\ x_5 = 1,\ x_6 = -\frac{7}{3}$.

57. $D = (P, Q) = X^2 + X + 2;\ D(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

Metoda II

$P = (X^2 + X + 2)(3X^2 + 2X + 4)$ și

$Q = (X^2 + X + 2)(4X^2 - 5X + 1)$.

Calculând rădăcinile polinoamelor P și Q se determină rădăcinile comune ale lor: $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}$.

58. $D = (P, Q) = X^2 + X + 1;\ D(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

Metoda II

$P = (X^3 + 2)(X^2 + X + 1)$ și $Q = (X^2 + 5X + 1)(X^2 + X + 1)$.

Determinăm rădăcinile lui P și Q, apoi determinăm rădăcinile comune:

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

59. Fie $\alpha \in \mathbf{C}$ o rădăcină comună a polinoamelor (în caz că ea există). Atunci vom avea:

$$\alpha^4 + \alpha^3 + 2\alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0 \text{ și } \alpha^4 - \alpha^3 - 4\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0.$$

Scăzând cele 2 ecuații vom obține: $2\alpha \cdot (\alpha^2 + 3\alpha - 4) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = -4$.

Rădăcinile comune (dacă există) ale celor 2 polinoame se află printre aceste 3 numere. Cum nici unul nu verifică ecuația $P(x) = 0$, rezultă că cele 2 polinoame nu au rădăcini comune.

Metoda II

$D = (P, Q) = 1$, deci polinoamele fiind prime între ele, rezultă că P și Q nu au rădăcini comune.

60. Fie $\alpha \in \mathbf{Z}$ rădăcina întreagă comună. Scăzând cele 2 relații obținem:

$3\alpha^2 + \alpha \cdot (a - b) + b - a = 0 \Rightarrow 3\alpha^2 = (b - a)(\alpha - 1)$; $\alpha = 1$ nu convine deoarece nu poate fi rădăcină comună a celor 2 ecuații.

Pentru $\alpha \in \mathbf{Z} - \{1\} \Rightarrow b - a = \frac{3\alpha^2}{\alpha - 1} = 3(\alpha + 1) + \frac{3}{\alpha - 1} \in \mathbf{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha - 1 \in \{\pm 1, \pm 3\} \Rightarrow \alpha \in \{0, -2, 2, 4\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $\alpha = 0 \Rightarrow a = b = 0$.
Pentru $\alpha = -2 \Rightarrow a = -4, b = -8$.
Pentru $\alpha \in \{2, 4\} \Rightarrow a, b \notin \mathbf{Z}$.
Deci $\alpha \in \{-2, 0\}$.

61. $z = yi$ este soluție a ecuației $\Rightarrow$

$$\Rightarrow -y^3 \cdot i + (2\sqrt{3} + 3i)y^2 + yi(1 + 4\sqrt{3}i) - 3i - 6\sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow i(-y^3 + 3y^2 + y - 3) + (2\sqrt{3} \cdot y^2 - 4\sqrt{3} \cdot y - 6\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 3y^2 - y + 3 = 0 \text{ şi } 2\sqrt{3}y^2 - 4\sqrt{3}y - 6\sqrt{3} = 0.$$

Prima ecuația are rădăcinile: $y_1 = 1, y_2 = -1, y_3 = 3$.
Dintre acestea verifică a doua ecuație doar y_2 şi $y_3 \Rightarrow z_1 = -i, z_2 = 3i$. Conform teoremei lui Bézout , polinomul dat se divide cu:

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - z(z_1 + z_2) + z_1 z_2 = z^2 - 2iz + 3.$$

$$P(z) = (z^2 - 2iz + 3)(z - 2\sqrt{3} - i) \Rightarrow z_3 = 2\sqrt{3} + i.$$

62. $z = y \cdot i$ este soluție a ecuației $\Rightarrow$

$$\Rightarrow i(-y^3 + 2y^2 + 13y + 10) + (y^2 \cdot \sqrt{3} - 3y\sqrt{3} - 10\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 2y^2 - 13y - 10 = 0 \text{ şi } y^2\sqrt{3} - 3y\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = 0.$$

Rădăcinile comune ale celor 2 ecuații sunt:

$$y_1 = 5, y_2 = -2.$$

Deci $z_1 = 5i, z_2 = -2i$. Cum polinomul P se divide prin $(z - z_1)(z - z_2)$ rezultă $z_3 = \sqrt{3} - i$.

63. Polinomul fiind cu coeficienți reali, dacă admite soluția $x_1 = a + \sqrt{3}$ atunci va avea şi soluția $x_1 = a - \sqrt{3}$.

$$P(a + \sqrt{3}) = a^4 - 3a^3 + 17a^2 - 34a + 8 + \sqrt{3}(4a^3 - 9a^2 + 10a - 16) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^4 - 3a^3 + 17a^2 - 34a + 8 = 0 \text{ şi } 4a^3 - 9a^2 + 10a - 16 = 0.$$

Singura rădăcină comună a celor două ecuații este $a = 2$.

Deci $x_1 = 2 + \sqrt{3}$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$. Aplicând teorema lui Bézout obținem:

$$P(X) = (X - 2 - \sqrt{3})(X - 2 + \sqrt{3})(X^2 + X + 2).$$

Deci $x_{3,4} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot i$.

64. Dacă $(x-1)^3 \mid P \Rightarrow (\exists) g \in \mathbf{R}[X]$ a.î. $P = (x-1)^3 \cdot g \Rightarrow P = (x-1)^2 \cdot [(x-1) \cdot g] \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-1)^2 \mid P$.
Reciproc, dacă $(x-1)^2 \mid P$.

Scanned with OKEN Scanner

Restul împărțirii lui P la $(x^2 - 2x + 1)$ este polinomul $x(2a + b + 3) - a - 3$.
Cum $(x-1)^2 \mid P \Rightarrow$ restul împărțirii este polinomul nul $\Rightarrow a = -3$ și $b = 3$.
Deci $P = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3 \Rightarrow (x-1)^3 \mid P$.

65. Aplicând teorema împărțirii cu rest obținem:

$$P(X) = (X - 1997)\,Q_1(X) + 1998$$
$$P(X) = (X - 1998)\,Q_2(X) + 1998$$
$$P(X) = (X - 1999)\,Q_3(X) + 1998$$

Presupunem că $(\exists)a \in \mathbf{Z}$ a.î. $P(a) = 2001 \Rightarrow (a - 1997) \cdot Q_1(a) = 3$;
$(a - 1998) \cdot Q_2(a) = 3$; $(a - 1999) \cdot Q_3(a) = 3 \Rightarrow (a - 1997) \mid 3$ și $(a - 1998) \mid 3$.
Cum $a - 1997$ și $a - 1998$ sunt consecutive $\Rightarrow 2|3$, contradicție.

66. 1) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \dfrac{a-b}{c-b} = \dfrac{a'-b'}{c'-b'}$ unde a, b, c sunt afixele punctelor A, B, C iar a', b', c' sunt afixele punctelor A', B', C'.

ΔABC echilateral $\Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta BCA \Leftrightarrow$

$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{b-c}{a-c} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

2) Fie z_1, z_2, z_3 afixele vârfurilor unui ΔABC echilateral și z_0 afixul centrului său circumscris.

Fie $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

$z_2 - z_0 = \varepsilon(z_1 - z_0)$ și $z_3 - z_0 = \varepsilon^2(z_1 - z_0)$.
Efectuând calculele obținem: $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 \cdot z_3 = 0$.
Reciproc, dacă $z_1 + \varepsilon \cdot z_2 + \varepsilon^2 \cdot z_3 = 0$, avem și relația:

$z_1 + \varepsilon \cdot z_1 + \varepsilon^2 \cdot z_1 = 0$. Scăzând cele 2 relații vom obține:
$\varepsilon(z_2 - z_1) + \varepsilon^2(z_3 - z_1) = 0 \Rightarrow z_2 - z_1 = \varepsilon(z_1 - z_3) \Rightarrow$
$\Rightarrow |z_2 - z_1| = |\cdot \varepsilon| \cdot |z_1 - z_3| \Rightarrow |z_2 - z_1| = |z_1 - z_3| \Leftrightarrow AB = AC$.
Analog se deduce $AB = BC$ deci ΔABC este echilateral.

3) Fie $ABCD$ de afixe a, b, c, d și $MNPQ$ de afixe m, n, p, q. Triunghiurile AMB, BNC, CPD, DQA fiind echilaterale, folosind punctul 2, vom avea:

$$a + \varepsilon m + \varepsilon^2 \cdot b = 0$$
$$b + \varepsilon \cdot n + \varepsilon^2 \cdot c = 0$$
$$c + \varepsilon \cdot p + \varepsilon^2 \cdot d = 0$$
$$d + \varepsilon \cdot q + \varepsilon^2 \cdot a = 0$$

Prin adunarea acestor relații obținem:

$$a + b + c + d + \varepsilon \cdot (m + n + p + q) + \varepsilon^2 \cdot (a + b + c + d) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1 + \varepsilon^2) \cdot (a + b + c + d) + \varepsilon \cdot (m + n + p + q) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a + b + c + d = m + n + p + q \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{m+n+p+q}{4} \quad \text{q.e.d.}$$

Scanned with OKEN Scanner

4) Considerăm afixele ΔABC, a, b, c şi ale ΔMNP, m, n respectiv p.

Din $\frac{MA}{MB} = \frac{NB}{NC} = \frac{PC}{PA} = k$ obţinem:

$$m = \frac{a - bk}{1-k}, n = \frac{b - kc}{1-k}, p = \frac{c - k \cdot a}{1-k}.$$

Afixul centrului de greutate al ΔABC este $g = \frac{a+b+c}{3}$; Afixul centrului de greutate al ΔMNP este

$$\frac{m+n+p}{3} = \frac{a+b+c-k(a+b+c)}{3(1-k)} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Deci cele 2 triunghiuri au acelaşi centru de greutate.

5) Fie $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ şi $P(z)$.

Are loc identitatea:

$(z-a)(b-c) + (z-b)(c-a) + (z-c)(a-b) = 0 \Rightarrow (z-a)(b-c) = (b-z)(c-a) + (c-z)(a-b) \Rightarrow |z-a| \cdot |b-c| \le |b-z| \cdot |c-a| + |c-z| \cdot |a-b| \Rightarrow PA \cdot BC \le PB \cdot AC + PC \cdot AB$.

Cum $AB = BC = AC \Rightarrow PA \le PB + PC$. Analog se deduc şi celelalte 2 inegalităţi.

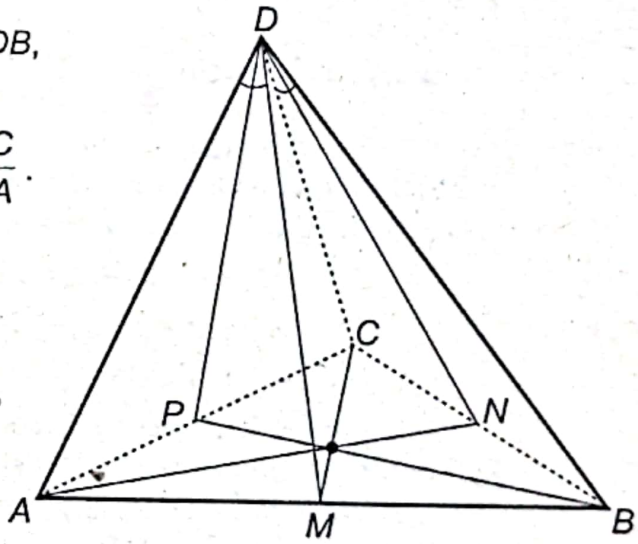
67. Aplicăm teorema bisectoarei în ΔADB, ΔBDC, ΔCDA.

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AD}{DB}; \frac{NB}{NC} = \frac{DB}{DC}; \frac{PC}{PA} = \frac{DC}{DA}.$$

Înmulţind aceste rapoarte obţinem:

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} = 1.$$

Aplicând reciproca teoremei lui Ceva, rezultă că CM, AN şi BP sunt concurente.



68. În planul (ADB) de o parte a dreptei AB, $(\exists!)E \in (ADB)$ a.î. $\Delta ABC \equiv \Delta ABE$. Dacă $DE \cap (AB) = \{M\}$ atunci $CM + MD$ este minim. Într-adevăr, pentru $M' \in (AB)$, $M' \neq M$, $CM' + M'D = EM' + M'D > ED = EM + MD$.

Dacă $DE \cap AB = \{M\}$ şi $M \notin [AB] \Rightarrow$ drumul minim va fi: $CB + BD$ sau $CA + AD$.

69. Fie A_1, A_2, A_3 mijloacele muchiilor DC, BC, BD. Aplicăm teorema lui Steiner (simedianele sunt izogonale medianelor).

$$\frac{DN}{NC} \cdot \frac{DA_1}{A_1C} = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2; \frac{MC}{MB} \cdot \frac{A_2C}{A_2B} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2; \frac{PB}{PD} \cdot \frac{A_3B}{A_3D} = \left(\frac{AB}{AD}\right)^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin înmulțire obținem: $\frac{DN}{NC}\cdot\frac{MC}{MB}\cdot\frac{PB}{PD}=1\Rightarrow BN, DM, CP$ sunt concurente (conform reciprocei teoremei lui Ceva).

70. 1) Fie $AA'\perp(BCD)$ și $DD'\perp(ABC)$.

Dacă AA' și DD' sunt secante, fie α planul ce conține aceste drepte.

$BC\perp AA'$ și $BC\perp DD'\Rightarrow BC\perp\alpha\Rightarrow BC\perp AD$.

Reciproc, dacă $BC\perp AD$, fie $AE\perp BC$ și $\alpha=(AED)$. $BC\perp AD$ și $BC\perp AE$ $\Rightarrow BC\perp\alpha$. Perpendicularele pe BC ce trec prin A sunt conținute în planul α deci $AA'\subset\alpha$. Analog $(DD')\subset\alpha\Rightarrow AA'$ și DD' sunt coplanare și ele se intersectează deoarece sunt înălțimi în ΔADE.

2) Fie $AE\perp BC$ și $DF\perp BC$.

$$AB^2-AC^2=BE^2-CE^2=BC\cdot(BE-CE)$$
$$BD^2-DC^2=BF^2-CF^2=BC\cdot(BF-CF)$$

$AD\perp BC\Leftrightarrow AA'$ și DD' sunt secante $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E\equiv F\Leftrightarrow AB^2-AC^2=BD^2-DC^2\Leftrightarrow AB^2+CD^2=BD^2+AC^2$.

3) Dacă $AB\perp CD$ și $AC\perp BD\Rightarrow$

$AD^2+BC^2=AC^2+BD^2$ și $AD^2+BC^2=AB^2+CD^2\Rightarrow$

$\Rightarrow AB^2+CD^2=BD^2+AC^2\Rightarrow AD\perp BC$.

71. Vom determina rădăcinile comune ale ecuațiilor: $x^n=1$ și $x^m=1$.

Notând $U_n=\{z\in\mathbf{C}^*\mid z^n=1\}$, vom arăta că $U_n\cap U_m=U_d$ unde $d=(m,n)$.

Fie $z\in U_d\Rightarrow z^d=1$. Cum $d\mid m$ și $d\mid n\Rightarrow z^m=1=z^n\Rightarrow$

$$\Rightarrow z\in U_n\cap U_m\Rightarrow U_d\subset U_n\cap U_m \qquad (1)$$

Dacă $z\in U_n\cap U_m\Rightarrow z^n=1=z^m$.

Din $d=(m,n)$, aplicând algoritmul lui Euclid rezultă că $(\exists)k, l\in\mathbf{Z}$ astfel încât:

$d=m\cdot k+nl\Rightarrow z^d=z^{mk+nl}=(z^m)^k\cdot(z^n)^l=1\Rightarrow z\in U_d\Rightarrow$

$$\Rightarrow U_m\cap U_n\subset U_d \qquad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă $U_n\cap U_m=U_d\Rightarrow(P,Q)=X^d-1$.

72. Din relațiile lui Viète obținem:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=1;\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=1$$

Dacă toate rădăcinile ecuației ar fi reale atunci

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\geq 0\Leftrightarrow$$

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2\cdot(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)\geq 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -1\geq 0$, contradicție. Deci polinomul dat nu poate avea toate rădăcinile reale.

73. Pentru $n=1$, $f=1-x$ are rădăcina 1. Presupunem afirmația adevărată pentru $n\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f=\frac{(-1)^n}{n!}(x-1)(x-2)\ldots(x-n).$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrăm afirmația pentru $n+1$.

$$f = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}(x-1)(x-2)\ldots(x-n) + (-1)^{n+1} \frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot (x-1)(x-2)\ldots(x-n)(-n-1+x)$$ ce are ca rădăcini numerele: 1, 2, 3, ..., $n+1$.

74. Se consideră ambele polinoame în nedeterminata X. Se împart şi se pune condiția ca restul să fie zero. Rezultă $m = -3$. Obținem astfel identitatea:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

75. Fie $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$, $(\forall) k \in \mathbf{N}$;

$$S_0 = 3,\ S_1 = 0,\ S_2 = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -2$$

$$\begin{cases} x_1^3 + x_1 + m = 0 \mid x_1^{k-3} \\ x_2^3 + x_2 + m = 0 \mid x_2^{k-3} \\ x_3^3 + x_3 + m = 0 \mid x_3^{k-3} \end{cases} \Rightarrow S_k + S_{k-2} + m\,S_{k-3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_k = -S_{k-2} - m\,S_{k-3},\ (\forall) k \geq 3.$$

$S_3 = -S_1 - m\,S_0 = -3m$
$S_4 = -S_2 - m\,S_1 = 2$
$S_5 = -S_3 - m\,S_2 = 3m + 2m = 5m$

Cum $S_5 = 10 \Rightarrow m = 2$.

76. Aplicând formula lui Taylor pentru polinoame obținem:

$$P(x) = P(1) + P'(1)(x-1) + \frac{P''(1)}{2!}\cdot(x-1)^2 + \ldots + \frac{P(1)^{(1999)}}{1999!}(x-1)^{(1999)}.$$

Deci restul împărțirii lui P la $(x-1)^2$ este:

$$r(x) = P(1) + P'(1)(x-1) = 11 + 2002(x-1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XI-a

77. 1) a) Se demonstrează prin inducție după m.

Pentru $m = 1$, $A \cdot B = B \cdot A$, adevărat.

Presupunem adevărat pentru $m = k$ și demonstrăm pentru $k + 1$

$$A \cdot B^{k+1} = A \cdot (B^k \cdot B) = (A \cdot B^k) \cdot B = (B^k \cdot A) \cdot B = B^k (A \cdot B) =$$

$$= B^k \cdot (B \cdot A) = (B^k \cdot B) \cdot A = B^{k+1} \cdot A$$

b) Păstrăm $m \in \mathbf{N}^*$ fixat și facem inducația după n.

Pentru $n = 1$, $A \cdot B^m = B^m \cdot A$ s-a demonstrat la punctul a).

Presupunem propoziția adevărată pentru n și o demonstrăm pentru $n + 1$.

$$A^{n+1} \cdot B^m = (A \cdot A^n) \cdot B^m = A \cdot (A^n \cdot B^m) = A \cdot (B^m \cdot A^n) = (A \cdot B^m) \cdot A^n =$$

$$= (B^m \cdot A) \cdot A^n = B^m \cdot A^{n+1}.$$

c), d) se demonstrează prin inducție.

2) Inducție după n.

3) $A = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$. Aplicând relația 2) rezultă:

$$A^n = 2^n \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{3} & -\sin\frac{n\pi}{3} \\ \sin\frac{n\pi}{3} & \cos\frac{n\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

4) $A = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow (\exists) t \in [0, 2\pi)$ astfel încât

$$\cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ și } \sin t = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow A = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

5) $A^2-(a+d)\cdot A=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a^2+ad & b(a+d) \\ c(a+d) & ad+d^2 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix}=(bc-ad)\cdot I_2=-\det(A)\cdot I_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A^2-\mathrm{Tr}(A)\cdot A+\det(A)\cdot I_2=O_2.$

Existența șirurilor $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ se face prin inducție după n.

Pentru $n=0$, $A^0=I_2=x_0\cdot A+y_0\cdot I_2\Rightarrow x_0=0,\ y_0=1.$

Pentru $n=1\Rightarrow A=x_1\cdot A+y_1\cdot I_2\Rightarrow x_1=1,\ y_1=0.$

Pentru $n=2\Rightarrow A^2=x_2\cdot A+y_2\cdot I_2=\mathrm{Tr}(A)\cdot A-\det(A)\cdot I_2\Rightarrow$

$\Rightarrow x_2=\mathrm{Tr}(A)=a+d$ și $y_2=-\det(A).$

Presupunem afirmația adevărată pentru n.

$A^{n+1}=A^n\cdot A=(x_n\cdot A+y_n\cdot I_2)\cdot A=x_n\cdot A^2+y_n\cdot A=$

$x_n\cdot(x_2\cdot A+y_2\cdot I_2)+y_n\cdot A=(x_2\cdot x_n+y_n)\cdot A+y_2\cdot x_n\cdot I_2=x_{n+1}\cdot A+y_{n+1}\cdot I_2\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases} x_{n+1}=x_2\cdot x_n+y_n \\ y_{n+1}=y_2\cdot x_n \end{cases}\Rightarrow y_n=y_2\cdot x_{n-1}\Rightarrow x_{n+1}=x_2\cdot x_n+y_2\cdot x_{n-1},\ (\forall)\ n\geq 1$

ceea ce reprezintă o relația de recurență liniară de ordinul 2.

$x_0=0$ și $x_1=1$ rezultă x_n și apoi se determină y_n.

6) Pentru $\det(A)=0$ ecuația caracteristică a matricei A va fi: $A^2=\mathrm{Tr}(A)\cdot A\Rightarrow$

$\Rightarrow A^3=(\mathrm{Tr}A)^2\cdot A.$

Prin inducție se arată că $A^n=(\mathrm{Tr}A)^{n-1}\cdot A.$

7) $\det A=i^2+1=0\Rightarrow A^n=(2i)^{1995}\cdot A=-2^{1995}\cdot i\cdot A.$

8) $\mathrm{Tr}A=4$; $\det A=4$. Ecuația caracteristică va fi:

$A^2-4A+4I_2=0$. $A^n=x_n\cdot A+y_n\cdot I_2$, $(\forall)\ n\geq 0$. Conform relațiilor de la punctul 5) vom obține:

$x_{n+1}=4\cdot x_n-4\cdot x_{n-1},\ (\forall)\ n\geq 1,\ x_1=x_2=2$

$x_n=q^n\Rightarrow q^{n+1}-4\cdot q^n+4\cdot q^{n-1}=0\Rightarrow q^2-4q+4=0\Rightarrow$

$\Rightarrow q_1=q_2=2\Rightarrow x_n=C_1\cdot 2^n+C_2\cdot n\cdot 2^n;$

$x_0=0=C_1$ și $x_1=1=2\cdot C_2\Rightarrow C_2=\frac{1}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow x_n=2^{n-1}\cdot n\Rightarrow y_n=-2^n\cdot(n-1).$

Deci $A^n=2^{n-1}\cdot n\cdot A-2^n\cdot(n-1)\cdot I_2,\ (\forall)\ n\geq 1.$

9) Vom demonstra prin inducție după n.

Pentru $n=1$; $A=x_1\cdot A^2+y_1\cdot A+z_1\cdot I_3\Rightarrow x_1=0,\ y_1=1,\ z_1=0.$

Pentru $n=2$; $A^2=x_2\cdot A^2+y_2\cdot A+z_2\cdot I_3\Rightarrow x_2=1,\ y_2=0;\ z=0.$

Pentru $n=3$, utilizăm ecuația caracteristică (teorema lui Hamilton-Cayley) și obținem: $x_3=\mathrm{Tr}(A)$, $y_3=-S(A)$, $z_3=\det A.$

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem adevărată pentru k și demonstrăm pentru $k+1$;

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = (x_k \cdot A^2 + y_k \cdot A + z_k \cdot I_3) \cdot A =$$

$$= x_k \cdot A^3 + y_k \cdot A^2 + z_k \cdot A =$$

$$= (x_3 \cdot x_k + y_k) \cdot A^2 + (y_3 \cdot x_k + z_k) \cdot A + z_3 x_k \cdot I_3 =$$

$$= x_{k+1} \cdot A^2 + y_{k+1} \cdot A + z_{k+1} \cdot I_3 .$$

Deci $\begin{cases} x_{k+1} = x_3 \cdot x_k + y_k \\ y_{k+1} = y_3 \cdot x_k + z_k \\ z_{k+1} = z_3 \cdot x_k \end{cases}$.

10) *Metoda I*

Tr $A = 3$: $S(A) = 3$, $\det A = 1$. Conform punctului 9) ecuația caracteristică devine: $A^3 = 3A^2 - 3A + I_3$.

Ecuația caracteristică va fi: $q^3 - 3q^2 + 3q - 1 = 0 \Rightarrow q_1 = q_2 = q_3 = 1$

$$x_n = \frac{n^2 - n}{2}, z_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \text{ și } y_n = -n(n-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (\forall)\, n \geq 1.$$

Metoda II

$$A = I_3 + B \text{ unde } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } B^3 = O_3 \Rightarrow B^k = O_3,\ (\forall)\, k \geq 3.$$

$$A^n = (I_3 + B)^n = C_n^0 \cdot I_3 + C_n^1 \cdot B + C_n^2 \cdot B^2 =$$

$$= I_3 + n \cdot B + \frac{n(n-1)}{2} \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Metoda III

Se calculează A, A^2, A^3, A^4 şi se intuieşte forma generală a lui A^n, apoi se demonstrează aceasta prin inducție.

11) $\det A = -40 + 42 = 2$.

$\operatorname{Tr} A = 3$.

Ecuația caracteristică este: $A^2 - 3A + 2 \cdot I_2 = 0$.

Să considerăm polinomul $P(X) = X^{31} + X^{30} + \ldots + X + 1$ şi să determinăm restul împărțirii la polinomul $X^2 - 3X + 2$.

$$X^{31} + X^{30} + \ldots + X + 1 = (X-1)(X-2)\cdot q(X) + aX + b$$

$P(1) = 32 = a + b$

$P(2) = 2^{32} - 1 = 2a + b \Rightarrow a = 2^{32} - 33$ şi $b = 65 - 2^{32}$.

Deci $A^{31} + A^{30} + \ldots + A + I_2 = a \cdot A + bI_2 = (2^{32} - 33) \cdot A + (65 - 2^{32}) \cdot I_2$.

78. Se verifică prin calcul direct.

79. 1) Vom demonstra relația prin inducție matematică.

$A^1 = I + B^2$

Presupunem că $A^k = I + k \cdot B^2$

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = (I + kB^2)\cdot A = A + kB^2 \cdot A = I + B^2 + kB^4 + kB^2 =$$

$= I + (k+1) \cdot B^2$ deoarece $B^4 = 0$.

2) Notăm $C = I + A^6 - A^8$

Utilizând a) obținem: $A^6 = I + 6 \cdot B^2$; $A^8 = I + 8B^2$.

$C = I + I + 6B^2 - I - 8B^2 = I - 2B^2$.

Luând $D = I + 2B^2$ şi calculând $C \cdot D = I - 4B^4 = I = D \cdot C$.

Deci $D = C^{-1}$.

80. 1) $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$.

Presupunem că $(\exists) a_n, b_n, c_n \in \mathbf{Z}$ a.î. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi calculăm

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a_n + a & b + ca_n + b_n \\ 0 & 1 & c + c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ şi identificând obținem:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + a \\ b_{n+1} &= c \cdot a_n + b_n + b \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= a \\ b_{n+1} - b_n &= n \cdot a \cdot c + b \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

2) $c_{n+1} = c_n + c \qquad c_{n+1} - c_n = c$

Însumând de la 1 la $n-1$ obţinem: $a_n = n \cdot a$, $c_n = n \cdot c$ şi

$$b_n = n\,b + ac \cdot \frac{n(n-1)}{2},\ (\forall)\, n \geq 1.$$

Cum $2 | n(n-1)$, $(\forall)\, n \geq 1 \Rightarrow a_n, b_n, c_n \in \mathbf{Z}$, $(\forall)\, n \geq 1$.

3) Dacă $p | n \Rightarrow p | a_n$, $p | c_n$ şi $p | b_n$.

Reciproc, dacă $p | a_n$, $p | b_n$ şi $p | c_n$.

Dacă $p \nmid n \Rightarrow p | a$, $p | c$ şi $p | b$!. Deci $p | n$.

81. a) Det $A = 15\,159 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 4$.

b) $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 14 & 9 \\ 2 & 15 & 31 \\ -3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -419 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(B) = 3.$

82. $D = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$.

83. 1) $\inf A_1 = 0$, $\sup A_1 = 1$. A_1 nu are min şi max.

$\inf A_2 = \min A_2 = 0$, $\sup A_2 = \max A_2 = 1$.

$\inf A_3 = 0$, $\sup A_3 = \max A_3 = 1$; A_3 nu are min.

$\inf A_4 = \min A_4 = 0$; $\sup A_4 = 1$; A_4 nu are max.

$\inf A_5 = \min A_5 = 0$; $\sup A_5 = \max A_5 = 2$.

În $\mathbf{Q}$, A_6 nu are inf, sup, max şi min.

2) Vom nota $A' = \{x \in \mathbf{R} \mid x = \text{punct de acumulare al lui } A\}$.

$A_1' = [0,1] = A_2' = A_3' = A_4' = A_5'$; $A_6' = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

3) $A = \mathbf{N}$. Spre exemplu $2 \notin \mathbf{N}'$ deoarece $(\exists) V = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \in \mathcal{V}(2)$ pentru care

$V \cap \mathbf{N} - \{2\} = \varnothing$.

$\mathbf{N}' = \{+\infty\}$. Deci $\mathbf{N} - \mathbf{N}' = \mathbf{N}$.

4) $A = (0, 1)$.

5) $(-\infty, 17) \in \mathcal{V}(-\infty)$, $[2, +\infty) \in \mathcal{V}(+\infty)$.

6) $\mathbf{Q}' = \mathbf{R} = (\mathbf{R} - \mathbf{Q})'$.

7) $[1, 2]$ este compactă.

Scanned with OKEN Scanner

84. 5) a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $+\infty$; d) $+\infty$; e) $-\infty$; f) 1;

g) 0; h) $+\infty$; i) $-\infty$; j) $\begin{cases} 0, & \text{dacă } k<p \\ \frac{a_k}{b_k}, & \text{dacă } k=p \\ (+\infty)\cdot \operatorname{sgn}\frac{a_k}{b_p}, & \text{dacă } k>p \end{cases}$;

k) 0; l) 0; m) $\frac{1}{2}$; n) 1; o) $-\frac{3}{2}$; p) 1; q) $\begin{cases} \nexists & \text{dacă } a\le -1 \\ 0 & \text{dacă } a\in(-1,1) \\ 1 & \text{dacă } a=1 \\ +\infty & \text{dacă } a>1 \end{cases}$;

r) $+\infty$; s) 0; t) 0; u) 1; v) 0; z) 3.

6) a) 1; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{3}{4}$; d) 2; e) 0; f) 0; g) 0; h) 0; i) 0; j) 0; k) 0; l) 0; m) 0;

n) 0; o) 0; p) 2; q) $+\infty$; r) 0; s) $\frac{7}{30}$; t) $+\infty$; u) $+\infty$; v) $\begin{cases} +\infty, & \text{dacă } 0<a<5 \\ 0, & \text{dacă } a=5 \\ -\infty, & \text{dacă } a>5 \end{cases}$.

7) a) 0; b) 0; c) 0; d) $+\infty$; e) 0; f) $+\infty$; g) $-\infty$; h) $+\infty$; i) -1; j) 0; k) $+\infty$;

l) $e^{\frac{3}{2}}$; m) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$; n) π; p) e^2; q) e^3; r) e; s) 1; t) 2π; u) $e^{-\frac{\pi^3}{2}}$; v) 0;

z) $\frac{\sin 2a}{2a}$; w) $\frac{5}{3}$.

8) a) Dacă $l<1$, fie $l<q<1$. Din $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l \Rightarrow (\exists)\, n_0\in \mathbf{N}^*$ a.î. $(\forall)\, n\ge n_0$

avem $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q \Rightarrow a_{n+1}<q\cdot a_n$, $(\forall)\, n\ge n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n_0+1}<q\cdot a_{n_0}$, $a_{n_0+2}<q\cdot a_{n_0+1}<q^2\cdot a_{n_0}$, $a_{n_0+n}<q^n\cdot a_{n_0}$.

Dar $0<a_{n_0+n}<q^n\cdot a_{n_0}\xrightarrow[n]{}0$ deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Dacă $l>1$, fie $1<p<l$. Din $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l \Rightarrow (\exists) n_0\in \mathbf{N}^*$ a.î. $(\forall)\, n\ge n_0$

avem $\frac{a_{n+1}}{a_n}>p \Rightarrow a_{n+1}>p\cdot a_n$, $(\forall)\, n\ge n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n_0+1}>p\cdot a_{n_0}$, $a_{n_0+2}>p\cdot a_{n_0+1}>p^2\cdot a_{n_0}$, $a_{n_0+n}>p^n\cdot a_{n_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru l = 1 nu se poate trage nici o concluzie asupra naturii convergenței.

b) $+\infty$; c) $+\infty$; d) 0; e) $+\infty$; f) $+\infty$; g) 0; h) $+\infty$; i) 0.

9) a) şirul $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $(\forall)\, n \geq 1$ este strict crescător şi are limita e,

$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $(\forall)\, n \geq 1$ este strict descrescător şi are aceeaşi limită.

b) $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$, $(\forall)\, n \geq 1 \Rightarrow (\gamma_n)_n$ este strict descrescător;

$0 < \gamma_n < 1$, $(\forall)\, n \geq 1$, deci aplicând teorema lui Weierstrass rezultă $(\gamma_n)_n$ este convergent.

c)

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}-\ln 2n\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)+\ln 2n-\ln n\right]=\ln 2$$

d) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} \xrightarrow{n} \ln 2$

e) $\ln q$; f) $\ln\frac{q}{p}$; g) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{n^3+n} < \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{n^3+k} < \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{n^3+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^3+n}\cdot\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right) < x_n < \frac{1}{n^3+1}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

deci $x_n \xrightarrow[n]{} \frac{1}{3}$.

h) 1; i) 1; j) 2; k) $x_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$

$\ln x_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$; Vom aplica inegalitățile

$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$, $(\forall)\, x > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k} < \ln x_n < \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow{n} \frac{1}{2}$ dar

$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n} < \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k} < \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln x_n \xrightarrow[n]{} \frac{1}{2} \Rightarrow x_n \xrightarrow[n]{} \sqrt{e}$.

Scanned with OKEN Scanner

l) 0; m) e^2; n) 0 pentru $a \in (0, 1]$ şi π pentru $a > 1$.

o) $\frac{2}{3}$; p) 0; q) $-\frac{2}{3}$; r) 1; s) $\frac{1}{2}$; t) 0.

10) c) Fie $x_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$; $y_n = n \nearrow +\infty$.

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a_{n+1} \xrightarrow[n]{} a \text{ deci } \frac{x_n}{y_n} \xrightarrow[n]{} a$$

Fie $x_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}$, $y_n = n \nearrow +\infty$.

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{1}{a_{n+1}} \xrightarrow[n]{} \frac{1}{a} \text{ deci } \frac{x_n}{y_n} \xrightarrow[n]{} \frac{1}{a} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} = a \text{ şi aplicăm inegalitatea mediilor:}$$

$$M_h \le M_g \le M_a \Rightarrow \lim_n \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 ... a_n} = a .$$

d) $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} ... \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_0}}$, unde $a_0 = 1$.

Cum $\frac{a_n}{a_{n-1}} \xrightarrow[n]{} l \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n]{} l$.

e) $\frac{1}{k+1}$; f) 1; g) $\frac{1}{e}$; h) 1; i) $+\infty$; j) 1

deoarece $\sqrt[n^2]{n!} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{n!}}$; Notăm $x_n = \sqrt[n]{n!}$;

$$1 < \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n(n+1)]{\frac{[(n+1)!]^n}{(n!)^{n+1}}} =$$

$$= \sqrt[n(n+1)]{\frac{(n+1)^n}{n!}} < \sqrt[n(n+1)]{(n+1)^n} = \sqrt[n+1]{n+1} \xrightarrow[n]{} 1$$

deci $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$.

k) $7 < \sqrt[n]{5^n + 7^n} < \sqrt[n]{2 \cdot 7^n} = 7 \cdot \sqrt[n]{2} \xrightarrow[n]{} 7$ deci $x_n \xrightarrow[n]{} 7$.

Scanned with OKEN Scanner

Metoda II

$$x_n = 5^n + 7^n;\ \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{5^{n+1}+7^{n+1}}{5^n+7^n} = \frac{7\left(\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}+1\right)}{\left(\frac{5}{7}\right)^n+1} \xrightarrow[n]{} 7$$

deci $\sqrt[n]{x_n} \xrightarrow[n]{} 7$.

l) $+\infty$; m) $\ln a$;

n) $x_n = 1+\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n} - 1 = 1+\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n}{\ln n} \xrightarrow[n]{} 1$;

o) $x_n = \dfrac{1}{n}\cdot\log_a n = \log_a \sqrt[n]{n} \xrightarrow[n]{} 0$ deoarece $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n]{} 1$.

p) $\dfrac{1}{2}$; q) $\dfrac{1}{2}$; se utilizează identitățile:

$$\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\cdot\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} \text{ și}$$

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\cdot\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

r) 0; s) 1; t) $+\infty$; u) $\dfrac{1}{4}$; v) $\dfrac{1}{9}$; z) 1.

11) a) $\sin x < x < \operatorname{tg} x,\ (\forall)x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin^2 x < x^2 < \operatorname{tg}^2 x,\ (\forall)x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \operatorname{ctg}^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} = 1+\operatorname{ctg}^2 x.$$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m = \cos m\alpha + i\sin m\alpha = C_m^0\cos^m\alpha + i\cdot C_m^1\cos^{m-1}\alpha\cdot\sin\alpha -$$

$$-C_m^2\cos^{m-2}\alpha\cdot\sin^2\alpha - i\cdot C_m^3\cdot\cos^{m-3}\alpha\cdot\sin^3\alpha + C_m^4\cdot\cos^{m-4}\alpha\cdot\sin^4\alpha + \ldots +$$

$$+\ldots + i^m\cdot C_m^m\sin^m\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin m\alpha = C_m^1\cos^{m-1}\alpha\cdot\sin\alpha - C_m^3\cdot\cos^{m-3}\alpha\cdot\sin^3\alpha + C_m^5\cos^{m-5}\alpha\cdot\sin^5\alpha - \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $m = 2n + 1$ vom obține:

$$\sin(2n+1)\alpha = C_{2n+1}^1 \cdot \cos^{2n}\alpha \cdot \sin\alpha - C_{2n+1}^3 \cdot \cos^{2n-2}\alpha \cdot \sin^3\alpha +$$

$$+ C_{2n+1}^5 \cdot \cos^{2n-4}\alpha \cdot \sin^5\alpha - \ldots \Rightarrow$$

$$\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin^{2n+1}\alpha} = C_{2n+1}^1 \cdot \operatorname{ctg}^{2n}\alpha - C_{2n+1}^3 \cdot \operatorname{ctg}^{2n-2}\alpha + C_{2n+1}^5 \cdot \operatorname{ctg}^{2n-4} \cdot \alpha - \ldots$$

Pentru $\alpha_k = \frac{k\pi}{2n+1}$, $1 \le k \le n$, $\alpha_k \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $z_1 = \operatorname{ctg}^2\alpha_1$,

$z_2 = \operatorname{ctg}^2\alpha_2$, ..., $z_n = \operatorname{ctg}^2\alpha_n$ sunt rădăcinile ecuației de gradul n:

$$C_{2n+1}^1 z^n - C_{2n+1}^3 z^{n-1} + C_{2n+1}^5 z^{n-2} - \ldots = 0$$

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) < n + (z_1 + z_2 + \ldots + z_n).$$

Aplicând relațiile lui Viète obținem:

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = \frac{C_{2n+1}^3}{C_{2n+1}^1} = \frac{4n^2 - 2n}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{4n^2-2n}{(2n+1)^2} < x_n < \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \cdot \frac{4n^2+4n}{6} \Rightarrow x_n \xrightarrow[n]{} \frac{\pi^2}{6}.$$

b) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n]{} \frac{\pi^2}{8};$$

c) $$x_n = \frac{\pi^2}{8} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}, \; y_n = \frac{1}{n} \searrow 0, \; x_n \xrightarrow[n]{} 0$$

$$\frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = \frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} \xrightarrow[n]{} \frac{1}{4}. \text{ Deci } \frac{x_n}{y_n} \xrightarrow[n]{} \frac{1}{4}.$$

d) $$\operatorname{ctg}^4 x < \frac{1}{x^4} < 1 + 2\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^4 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 < \frac{(2n+1)^4}{\pi^4} \cdot x_n < 1 + 2(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) + (z_1^2 + \cdots + z_n^2)$$

$$\Rightarrow x_n \xrightarrow[n]{} \frac{\pi^4}{90}.$$

Scanned with OKEN Scanner

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{90}-\frac{1}{16}\cdot\frac{\pi^4}{90}=\frac{\pi^4}{96}$.

f) Fie $x_n=\frac{\pi^4}{96}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^4}\xrightarrow[n]{}0$, $y_n=\frac{1}{n^3}\searrow 0$.

$$\frac{x_n-x_{n+1}}{y_n-y_{n+1}}=\frac{n^3(n+1)^3}{(2n+1)^4(3n^2+3n+1)}\xrightarrow[n]{}\frac{1}{48}.$$

Deci $\frac{x_n}{y_n}\xrightarrow[n]{}\frac{1}{48}$.

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^6}=\frac{\pi^6}{945}$.

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$.

i) $x_n=\frac{\pi^6}{960}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^6}$, $y_n=\frac{1}{x^5}\searrow 0$

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{n^5(n+1)^5}{(2n+1)^6(5n^4+10n^3+10n^2+5n+1)}\xrightarrow[n]{}\frac{1}{320}.$$

Deci conform T. Stolz $\left(\frac{0}{0}\right)$ obţinem $\frac{x_n}{y_n}\xrightarrow[n]{}\frac{1}{320}$.

j) $\frac{\pi^8}{9450}$; k) $\frac{17\pi^8}{161280}$; l) $\frac{1}{1792}$.

Notă istorică. Limitele de la punctele a) şi d) au fost propuse de Jacob Bernoulli în 1689 şi calculate de Leonhard Euler în 1736.

12) a) Dacă $a_1>0\Rightarrow a_1\sin x\in(0,1]\subset\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow a_n\in(0,1]$, $(\forall)\,n\geq 1\Rightarrow$

$\Rightarrow (a_n)_n$ şir mărginit.

Din inegalitatea $\sin x<x$, $(\forall)x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$ şirul $(a_n)_n$ este strict descrescător $\Rightarrow (a_n)_n$ este convergent..

Notăm $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă dată se obţine $x=\sin x$. Dar ecuaţia $\sin x=x$ are unica soluţie $x=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Analog, vom obține $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ și în cazul $a_1 \le 0$.

b) Prin inducție se arată că $a_n = n$, $(\forall)\, n \ge 1$.

c) Presupunem că $a_n \xrightarrow[n]{} x \in [-1,1] \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(n+2) \xrightarrow[n]{} x \Rightarrow \sin(n+2) - \sin n \xrightarrow[n]{} 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin 1 \cdot \cos(n+1) \xrightarrow[n]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(n+1) \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow \cos n \xrightarrow{n} 0$.

Din $\sin 2n \xrightarrow{n} x \Rightarrow 2\sin n \cdot \cos n \xrightarrow{n} x \Rightarrow x = 0$.

Din $\sin n \xrightarrow{n} 0$ și $\cos n \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow \sin^2 n + \cos^2 n \xrightarrow{n} 0$.

Dar $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$, $(\forall)\, n \ge 1$, contradicție. Deci $(a_n)_n$ este divergent.

d) Se asociază funcția $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 7x$; $x_v = f \Rightarrow$

$\Rightarrow u_7 = -\frac{49}{2}$ este cel mai mic termen al șirului.

e) Se asociază funcția $f: [1, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{3}x$,

$x_v = \frac{7}{3} \in (2,3)$, $u_2 = \frac{16}{6} > u_3 = \frac{15}{6}$.

Deci u_2 este cel mai mare termen al șirului.

f) Prin inducție se arată că $a_n, b_n > 0$, $(\forall)\, n \ge 0$. Aplicând inegalitatea mediilor obținem $b_n < a_n$, $(\forall)\, n \ge 0$ $b_0 < b_1 < a_1 < a_0$. Presupunem că $a_n < a_{n-1}$

$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$, $(\forall)\, n \ge 0$; $0 < a_n$, $(\forall)\, n \ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_n)_n$ convergent.

Fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b_0 < b_1$. Presupunem că:

$b_{n-1} < b_n$; $b_{n-1} < \sqrt{a_n \cdot b_n} > \sqrt{b_n^2} = b_n$, $(\forall)\, n \ge 0 \Rightarrow (b_n)_n$ strict crescător $\Rightarrow$ în $\overline{\mathbf{R}}$ există $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Dar $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \le \lim\limits_{n\to\infty} a_n = x \Rightarrow$

$\Rightarrow (b_n)_n$ convergent.

Fie $y = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Trecând la limită în prima relație de recurență obținem:

$x = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x = y$.

Scanned with OKEN Scanner

g) $a_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}} > \sqrt{a} = a_1$. Presupunem că $a_{n-1} < a_n$

$a_{n+1} = \sqrt{a+a_n} > \sqrt{a+a_{n-1}} = a_n$, $(\forall)\, n \geq 1$.

Deci șirul $(a_n)_n$ este convergent.

Prin inducție se demonstrează că $a_n < \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, $(\forall)\, n \geq 1$. Conform teoremei lui Weierstrass $\Rightarrow$ șirul $(a_n)_n$ este convergent și vom nota $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Trecând la limită în relația de recurență dată vom obține:

$$x = \sqrt{a+x} \Rightarrow x^2 - x - a = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2};$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} > 0 \text{ convine. } x_2 < 0 \text{ nu convine.}$$

h) $x_n = -\dfrac{1}{2}x_{n-1} + 1 \Rightarrow x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{2}(x_{n-1} - x_n) =$

$$= -\frac{1}{2}(x_n - x_{n-1}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (x_{n-1} - x_{n-2}) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x_1 - x_0).$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_{n+1} - x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Dăm lui n valorile de la 0 la $n-1$:

$$x_1 - x_0 = 1$$

$$x_2 - x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$x_3 - x_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\cdots$$

$$x_n - x_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$x_n - x_0 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow$$

$$x_n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}} \xrightarrow{n} \frac{2}{3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

i) Facem substituția $x_n = \frac{1}{2^n} \cdot y_n$, $(\forall) n \geq 0$.

$$y_0 = -1;\ \frac{1}{2^{n+1}} \cdot y_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot y_n + \frac{1}{2^n} \Rightarrow y_{n+1} = y_n + 2$$

$y_{n+1} - y_n = 2$, $(\forall) n \geq 0$. Dăm lui n valorile de la 0 la $n-1$:

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= 2 \\ y_2 - y_1 &= 2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ y_n - y_{n-1} &= 2 \end{aligned}$$

$$y_n + 1 = 2n \Rightarrow y_n = 2n - 1 \Rightarrow x_n = \frac{2n-1}{2^n};\ x_n > 0, (\forall) n \geq 1.$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{2n-1} \xrightarrow{n} \frac{1}{2} < 1. \text{ Deci } x_n \xrightarrow{n} 0.$$

j) $+\infty$; k) $+\infty$; l) 0; m) $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

n) $x_n = q^n \Rightarrow q^3 - 6q^2 + 11q - 6 = 0$ ecuația caracteristică

$q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 3 \Rightarrow x_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n + C_3 \cdot 3^n$.

Cum $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2 \Rightarrow C_1 = \frac{13}{2}$, $C_2 = -\frac{9}{2}$, $C_3 = \frac{7}{6}$.

Deci: $\frac{x_n}{3^n} = \frac{13}{23^n} - \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{7}{6} \xrightarrow{n} \frac{7}{6}$.

p) $a \cdot b$, deoarece $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$ unde:

$\alpha_n \xrightarrow{n} 0$ și $\beta_n \xrightarrow{n} 0$.

85. 1) -20; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $-\frac{1}{27}$; 4) $\frac{112}{27}$; 5) -1; 6) -1; 7) $+\infty$; 8) 0; 9) 0; 10) $+\infty$;

11) $\frac{1}{3}$; 12) $4(\ln 2 - 1)$; 13) 7^3; 14) $\frac{3}{5}$; 15) $\frac{1}{e}$.

Scanned with OKEN Scanner

86. 1) $x = 2, y = 0$; 2) $y = x$; 3) $y = x, y = -x$; 4) $y = -1, y = 1$;
5) $x = -1, x = 1, y = x, y = -x$; 6) $y = 0$;

7) $y = -\frac{\pi}{2}x - 1,\ y = \frac{\pi}{2} - 1$; 8) $y = 2x + 1$.

87. 1) Fie $x_n \xrightarrow[n]{} 2$ atunci $f(x_n) = 2 \cdot x_n + 3 \xrightarrow[n]{} 7 = f(2)$ deci f este continuă în $x_0 = 2$.

2) a) $m = -1$; b) $m = 1$; c) $m = 1$; d) $m = 1$.

3) $|f(1) - 1| \le 0$; Cum $|f(1) - 1| \ge 0 \Rightarrow f(1) = 1$.

Fie $x_n \xrightarrow[n]{} 1 \Rightarrow |f(x_n) - f(1)| \le (x_n - 1)^4 \xrightarrow[n]{} 0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n]{} f(1)$ adică f este continuă în $x_0 = 1$.

4) a) Toate punctele din domeniu sunt de discontinuitate de speța a II-a.
b) $x = 0$ de speța I; c) $x = 0$ de speța I; d) $x = 0$ de speța I.

5) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty, 0) \\ x, & x \in [0,1] \\ x^2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$ f continuă pe $\mathbf{R}-\{0, 1\}$

ca restricții de funcții elementare.

$l_s(0) = l_d(0) = f(0)$ și $l_s(1) = l_d(1) = f(1) \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ continuă în $x = 0$ și $x = 1$ deci f continuă pe $\mathbf{R}$.

6) Fie $x_0 \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ și $x_n \in \mathbf{Q}$ a.î. $x_n \xrightarrow[n]{} x_0$;

$f(x_n) = g(x_n),\ (\forall) n \ge 1,\ f(x_n) \xrightarrow[n]{} f(x_0),\ g(x_n) \xrightarrow[n]{} g(x_0)$ și din unicitatea limitei avem $f(x_0) = g(x_0)$.

Deci $f = g$.

7) Pentru $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.

Pentru $y = -x \Rightarrow f(0) = f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x),\ (\forall) x \in \mathbf{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ = funcția impară.

Pentru $y = x \Rightarrow f(2x) = 2f(x)$.

Prin inducție se demonstrează că $f(nx) = n \cdot f(x)$.

$f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$, deci $f(kx) = k \cdot f(x),\ (\forall) x \in \mathbf{R}$ și $k \in \mathbf{Z}$.

Fie $\frac{m}{n} \in Z,\ n \ne 0$.

$$f\left(n \cdot \frac{m}{n} \cdot x\right) = f(mx) = m \cdot f(x) = n \cdot f\left(\frac{m}{n}x\right) \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n} \cdot f(x)$$

Pentru $x = 1$ obținem: $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} \cdot f(1)$.

Scanned with OKEN Scanner

$f(x) = k \cdot x$, $(\forall)\, x \in \mathbf{Q}$, unde $k = f(1)$. Fie $x_0 \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q} \Rightarrow (\exists) x_n \in \mathbf{Q}$, $(\forall)\, n \geq 1$ a.î. $x_n \xrightarrow[n]{} x_0 \Rightarrow f(x_n) = k \cdot x_n \xrightarrow[n]{} k \cdot x_0$; Dar $f(x_n) \xrightarrow[n]{} f(x_0)$ deoarece f este continuă, deci $f(x_0) = kx_0 \Rightarrow f(x) = k \cdot x$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

8) Sunt uniform continue funcțiile de la punctele a), c), d).

9) $f((-1, 1)) = [0, 1)$, $f^{-1}((2, 3)) = (-3, -2) \cup (2, 3)$, $f^{-1}([0, 5]) = [-5, 5]$.

10) $f([-2, 2]) = f([-2, 0)) \cup f([0, 2]) = \{2\} \cup [0, 2] = [0, 2]$;

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 2$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ este punct de discontinuitate de speța I $\Rightarrow f$ nu are proprietatea Darboux.

11) Are proprietatea Darboux numai funcția de la punctul a).

88. 1) Pentru $x = x_0 \Rightarrow P(x_0) = A_0$.

$P'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + \ldots + nA_n(x - x_0)^{n-1} \Rightarrow P'(x_0) = A_1$

$P''(x) = 2A_2 + 3!(x - x_0) \cdot A_3 + \ldots + n(n-1)(x - x_0)^{n-1} \Rightarrow P''(x_0) = 2A_2$

deci $A_2 = \dfrac{P''(x_0)}{2!}, \ldots, P^{(n)}(x_0) = n! \cdot A_n \Rightarrow A_n = \dfrac{P^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Deci

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

2) Se aplică formula precedentă numită și formula lui Taylor pentru polinoame.

3) a) $f(1) = f'(1) = 0$ și $f''(1) \neq 0$; b) $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$ și $f'''(1) \neq 0$;

c) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ și $f''\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0$.

4) $P(x) = P(1) + \dfrac{P'(1)}{1!}(x - 1) + \dfrac{P''(1)}{2!}(x - 1)^2 + (x - 1)^3 \cdot Q(x)$.

Deci $R(x) = P(1) + P'(1)(x - 1) + \dfrac{P''(1)}{2}(x - 1)^2$.

5) Presupunem că P are cel puțin o rădăcină x_0 multiplă $\Rightarrow P(x_0) = 0$ și $P'(x_0) = 0 \Rightarrow (P - P')(x_0) = P(x_0) - P'(x_0) = 0$.

Dar $P - P' = \dfrac{x^n}{n!} = 0 \Rightarrow x = 0$, adică $x_0 = 0$.

Dar $P(0) = 1$. Am ajuns astfel la o contradicție.

89. f derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ ca restricție de funcții elementare $\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbf{R}^*$.

$\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = b$; $f(0) = 1$.

f continuă în $x = 0 \Leftrightarrow b = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

$$f_s'(0)=\lim_{x\uparrow 0}\frac{x^3-x}{x}=\lim_{x\uparrow 0}(x^2-1)=-1$$

$$f_d'(0)=\lim_{x\downarrow 0}\frac{a\cdot\sin x+\cos x-1}{x}=\lim_{x\downarrow 0}\left[a\cdot\frac{\sin x}{x}-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{x}{4}\right]=a$$

f este derivabilă în $x=0\Leftrightarrow a=-1$ și $b=1$.
Deci f este derivabilă pe $\mathbf{R}\Leftrightarrow a=-1$ și $b=1$.

Metoda II

Pentru $b=1$, f continuă pe $\mathbf{R}$.

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-1, & x<0\\ a\cos x-b\sin x, & x>0\end{cases},\ f_s'(0)=\lim_{x\uparrow 0}f'(x)=-1;$$

$f_d'(0)=\lim_{x\downarrow 0}f'(x)=a$. Deci pentru $a=-1$ și $b=1$, f este derivabilă pe $\mathbf{R}$.

90. $\lim_{x\uparrow 0}f(x)=b$; $\lim_{x\downarrow 0}\cos x=1=f(0)$

f este continuă în $x=0\Leftrightarrow b=1$

$$f'(x)=\begin{cases}a, & x<0\\ -\sin x, & x>0\end{cases};\ f_s'(0)=a,\ f_d'(0)=\lim_{x\downarrow 0}f'(x)=0$$

f este derivabilă în $x=0\Leftrightarrow a=0$ și $b=1$.

91. Definim funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=a^x-x-1$.
f este derivabilă (funcția fiind elementară).
$f(x)\geq 0$, $(\forall)\,x\in\mathbf{R}\Leftrightarrow f(x)\geq f(0)$, $(\forall)\,x\in\mathbf{R}\Rightarrow x=0$ este punct de minim global deci și local.

Conform toeremei lui Fermat $\Rightarrow f'(0)=0$.

Dar $f'(x)=a^x\cdot\ln a-1\Rightarrow\ln a=1\Rightarrow a=e$.

Deci $e^x\geq x+1$, $(\forall)\,x\in\mathbf{R}$.

92. f continuă pe $[0,1]$ ca funcție elementară; f derivabilă pe $(0,1)$ ca funcție elementară;
$f(0)=1=f(1)$. Deci $(\exists)c\in(0,1)$ a.î. $f'(c)=0$.

Dar $f'(x)=3x^2-1\Rightarrow 3c^2=1\Rightarrow c^2=\frac{1}{3}\Rightarrow c=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Convine $c=\frac{1}{\sqrt{3}}\in(0,1)$.

Scanned with OKEN Scanner

93. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=0$.

2) f este continuă pe $[c, d]$ şi derivabilă pe (c, d) ca restricţie de funcţie elementară deci i se poate aplica teorema lui Lagrange.

3) $(\exists)\ x_k\in(k+1, k+2)$ a.î. $f'(x_k)=\dfrac{f(k+2)-f(k+1)}{k+2-k-1}=f(k+2)-f(k+1)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}f'(x_k)=\sum_{k=0}^{n}(f(k+2)-f(k+1))=f(n+2)-f(1)\xrightarrow{n}-f(1)=-\frac{1}{2}$$

deoarece $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

94. $f:\mathbf{R}-\mathbf{Z}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x-[x]}$.

95. 1), 2) f este funcţie elementară $\Rightarrow f$ este continuă $\Rightarrow f$ are proprietatea lui Darboux.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow f(\mathbf{R})=\mathbf{R}$ adică f este surjectivă.

$f'(x)=3x^2+1>0,\ (\forall)\ x\in\mathbf{R}\Rightarrow f$ este strict crescătoare $\Rightarrow f$ este injectivă.

Deci f este bijectivă.

3) Aplicând teorema de derivabilitate a funcţiei inverse,

$(f^{-1})'(20)=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{13}$ deoarece $f(2)=20$.

96. Definim funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{x}{e^x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0\Leftrightarrow(\forall)\ (x_n)_n,\ x_n\neq0,\ (\forall)\ n\geq1\text{ şi}$$

$$x_n\xrightarrow[n]{}+\infty\text{ avem }\frac{x_n}{e^{x_n}}\xrightarrow{n}0.$$

În particular pentru $x_n=n$ obţinem: $\dfrac{n}{e^n}\xrightarrow{n}0$.

97. 1) $\lim\limits_{x\downarrow0}\dfrac{1}{x}\cdot\ln x=-\infty\Rightarrow x=0$ este asimptotă verticală la graficul lui f.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0\Rightarrow y=0\text{ este asimptotă orizontală la }+\infty\text{ pentru graficul lui }f.$$

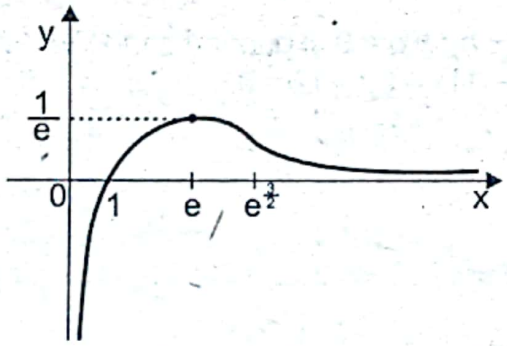
Scanned with OKEN Scanner

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e.$

$f''(x) = \dfrac{-3+2\ln x}{x^3} = 0 \Rightarrow \ln x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = e^{3/2}$

x	0		1		e		$e^{3/2}$		$+\infty$
f'	|	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
f	|	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	↘	0
f''	|	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	



$x = e^{3/2}$ este punct de inflexiune iar $x = e$ este de maxim.

2) $e < 3 \le n < n+1 \Rightarrow f(n) > f(n+1) \Leftrightarrow \dfrac{\ln n}{n} > \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \Leftrightarrow n^{n+1} > (n+1)^n, (\forall)\, n \ge 3.$

Observație

$$(n+1)^n < n^{n+1} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n,\ (\forall)\, n \ge 3.$$

Dar $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3 \le n$ (s-a demonstrat la șiruri).

98. Tangentele fiind paralele cu prima bisectoare au pantele egale cu 1. Deci $y = x + n \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x - y + n = 0$. Punem condiția ca distanța de la originea 0 la cele 2 tangente să fie 2.

Obținem: $\dfrac{|n|}{\sqrt{2}} = 2 \Leftrightarrow |n| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow n = \pm 2\sqrt{2}$.

Ecuațiile tangentelor sunt: $x - y + 2\sqrt{2} = 0$, și $x - y - 2\sqrt{2} = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

99. Fie $M(\lambda, \lambda)$; $(MA): (\lambda-1)x-(\lambda-3)y-2\lambda=0$, $(MB): (\lambda-2)x-(\lambda+1)y+3\lambda=0$ deci $P\left(\frac{2\lambda}{\lambda-1},0\right)$ şi $Q\left(0,\frac{3\lambda}{\lambda+1}\right)$. Ecuaţia dreptei PQ va fi:

$$(3\lambda-3)x+(2\lambda+2)y-6\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(3x+2y-6)-(3x-2y)=0.$$

Dreapta PQ trece prin punctul comun dreptelor:

$$3x+2y-6=0 \text{ şi } 3x-2y=0 \Rightarrow \left(1,\frac{3}{2}\right) \text{ sunt coordonatele punctului fix.}$$

100. $-2a=1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$.

$-2b=-4 \Rightarrow b=2$.

$r^2=\frac{1}{4}+4+2=\frac{25}{4} \Rightarrow r=\frac{5}{2}$ şi centrul este $C\left(-\frac{1}{2},2\right)$.

101. $x^2+y^2+mx+ny+p=0$ şi punând condiţiile date $\Rightarrow$
$\Rightarrow 5(x^2+y^2)-11x-9y-12=0$.

Clasa a XII-a

102. $U(\mathbf{Z}_{10})=\{\hat{1},\hat{3},\hat{7},\hat{9}\}$; $U(\mathbf{Z}_{12})=\{\hat{1},\hat{5},\hat{7},\hat{11}\}$.

În general în $U(\mathbf{Z}_n)=\{\hat{a}\in\mathbf{Z}_n \mid (a,n)=1\}$.

card $U(\mathbf{Z}_n)=\varphi(n)$, φ = indicatorul lui Euler.

Pentru $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$, $p_1, p_2, \dots, p_k$ sunt numere prime distincte 2 câte 2 şi

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbf{N}^*$ atunci $\varphi(n)=n\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$. (Euler)

103. În $\mathbf{Z}_3$, $\det \hat{A}=\begin{vmatrix} \hat{0} & \hat{2} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{2} \end{vmatrix}=\hat{1}$.

Deci $\det A \neq 0$, căci în caz contrar rezultă $\det \hat{A}=\hat{0}$! Deci matricea A este nesingulară.

Scanned with OKEN Scanner

104. Vom demonstra mai întâi prin inducție egalitatea

$$F_{n+m+1} = F_n \cdot F_{m+1} + F_{n+1} \cdot F_{m+2},\ (\forall)\ n, m \in \mathbf{N}.$$

Fixăm pe m și lăsăm pe n variabil.

Dacă $n = 0$ $\quad F_{m+1} = F_{m+1}$.

Dacă $n = 1$ $\quad F_{m+2} = F_{m+2}$.

Presupunem că egalitatea are loc pentru orice $k \leq n$.

$$F_{n+m+1} = F_n \cdot F_{m+1} + F_{n+1} \cdot F_{m+2}$$

$$F_{n+m} = F_{n-1} \cdot F_{m+1} + F_n \cdot F_{m+2}$$

Însumând aceste două relații obținem:

$$F_{n+m+2} = F_{n+1} \cdot F_{m+1} + F_{n+2} \cdot F_{m+2}.$$

Fie $A, B \in M$; $A \cdot B = \begin{pmatrix} F_k & 0 & F_{k+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ F_{k+1} & 0 & F_{k+2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_m & 0 & F_{m+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ F_{m+1} & 0 & F_{m+2} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} F_{k+m} & 0 & F_{k+m+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ F_{m+k+1} & 0 & F_{k+m+2} \end{pmatrix} \in M.$$

Înmulțirea este asociativă și pentru $k = 0 \Rightarrow I_3 \in M$.

Deci $(M, \cdot)$ este monoid. Comutativitatea se verifică imediat.

105. 1) $\det(A) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 102 & 222 & -88 \\ 188 & 321 & 424 \\ 409 & 253 & 496 \end{vmatrix} = 2k$.

2) Trecând elementele matricei A în $\mathbf{Z}_3$ obținem:

$$\det \hat{A} = \hat{2} \cdot \begin{vmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{1} \end{vmatrix} = \hat{2} \neq \hat{0}$$ deci 3 nu divide $\det(A)$.

3) Cum 3 nu divide $\det(A) \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ este inversabilă în $\mathbf{M}_3(\mathbf{Q})$.

4) $U(\mathbf{Z}) = \{-1, 1\}$ deci o matrice $B \in \mathbf{M}_3(\mathbf{Z})$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(B) \in U(\mathbf{Z})$.
Cum 2 divide $\det A \Rightarrow \det(A) \notin \{-1, 1\} \Rightarrow A$ nu este inversabilă în $\mathbf{M}_3(\mathbf{Z})$.

5) $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ este inversabilă în $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$.

Scanned with OKEN Scanner

106. 1)

$\circ$	e	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
e	e	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
σ_1	σ_1	e	σ_5	σ_4	σ_1	σ_2
σ_2	σ_2	σ_4	e	σ_5	σ_1	σ_3
σ_3	σ_3	σ_5	σ_4	e	σ_2	σ_1
σ_4	σ_4	σ_2	σ_3	σ_1	σ_5	e
σ_5	σ_5	σ_3	σ_1	σ_2	e	σ_4

2) „ $\circ$ " este operație algebrică pe S_3. Cum „ $\circ$ " funcțiilor este operație asociativă, rezultă că pe S_3 „ $\circ$ " este o operație asociativă. Elementul neutru este e. Din tablă deducem că orice permutare are inversă ($e^{-1} = e$, $\sigma_1^{-1} = \sigma_1$, $\sigma_2^{-1} = \sigma_2$; $\sigma_3^{-1} = \sigma_3$, $\sigma_4^{-1} = \sigma_5$, $\sigma_5^{-1} = \sigma_4$). Din $\sigma_2 \cdot \sigma_5 = \sigma_3 \neq \sigma_1 = \sigma_5 \cdot \sigma_2 \Rightarrow (S_3, \circ)$ este grup necomutativ.

3) ord $\sigma = \min\{m \in \mathbf{N}^* \mid \sigma^m = e\}$.
Din tablă rezultă că: ord $e = 1$, ord $\sigma_1 = 2$, ord $\sigma_2 = 2$, ord $\sigma_3 = 2$, ord $\sigma_4 = 3$, ord $\sigma_5 = 3$.

4) $\sigma_1^{1999} = \sigma_1^{1998} \cdot \sigma_1 = e \cdot \sigma_1 = \sigma_1$; $\quad \sigma_2^{2000} = (\sigma_2^2)^{1000} = e^{1000} = e$

$\sigma_3^{2001} = \sigma_3^{2000} \cdot \sigma_3 = e \cdot \sigma_3 = \sigma_3$; $\quad \sigma_4^{2002} = \sigma_4^{2001} \cdot \sigma_4 = e \cdot \sigma_4 = \sigma_4$

$\sigma_4^{2003} = \sigma_5^{2001} \cdot \sigma_5^2 = e \cdot \sigma_4 = \sigma_4$

5) $x^2 = e \Rightarrow x \in \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$; $\quad y^3 = e \Rightarrow y \in \{e, \sigma_4, \sigma_5\}$;
$z^4 = e \Rightarrow z \in \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$; $\quad t^5 = e \Rightarrow t = e$; $p^6 = e \Rightarrow p \in S_3$.

6) Dacă $n \geq 3$, definim:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & \cdots & n \end{pmatrix} \in S_n, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & \cdots & n \end{pmatrix} \in S_n. (\sigma \circ \tau)(1) = 1, (\tau \circ \sigma)(1) = 2$$

$\Rightarrow \sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma \Rightarrow (S_n, \circ)$ este grup necomutativ. Dacă $n \leq 2 \Rightarrow S_1 = \{e\}$,

$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{e, \sigma\}$ unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Evident $(S_1, \circ)$ și $(S_2, \circ)$ sunt grupuri comutative. Deci, pentru $(S_n, \circ)$ grup necomutativ $\Rightarrow n \geq 3$.

107. 1) Fie $z_1, z_2 \in G \Rightarrow |z_1| = |z_2| = 1$; $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = 1 \Rightarrow z_1 \cdot z_2 \in G$. Fie:

$z \in G \Rightarrow z \neq 0$. $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = 1 \Rightarrow z^{-1} \in G$ deci $(G, \cdot)$ este subgrup al lui $(\mathbf{C}^*, \cdot)$.

2) Se demonstrează analog cu 1).

3) $f: G \to M, f(z) = f(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ este un izomorfism de grupuri.

Scanned with OKEN Scanner

108. 1) Fie $n \in \mathbf{N}$; $n\mathbf{Z}$ este un subgrup al lui $\mathbf{Z}$ deoarece $(\forall)\, x, y \in n\mathbf{Z}$, $x = nk_1$, $y = nk_2$ și $x - y = n(k_1 - k_2) \in n\mathbf{Z}$.
Deci $6\mathbf{Z}$ și $8\mathbf{Z}$ sunt subgrupuri ale grupului aditiv $\mathbf{Z}$.
Dacă $n \in \mathbf{N}^*$ atunci $(\mathbf{Z}, +) \cong (n\mathbf{Z}, +)$ izomorfismul de grup fiind

$$f : \mathbf{Z} \to n\mathbf{Z},\ f(x) = n \cdot x,\ (\forall)\, x \in \mathbf{Z}.$$

Deci $(6\mathbf{Z}, +) \cong (\mathbf{Z}, +)$, $(8\mathbf{Z}, +) \cong (\mathbf{Z}, +) \Rightarrow (6\mathbf{Z}, +) \cong (8\mathbf{Z}, +)$.
2) În general dacă H_1 și H_2 sunt două subgrupuri ale unui grup G atunci $H_1 \cap H_2$ este subgrup al lui G (Fie $x, y \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow x, y \in H_1$ și $x, y \in H_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \cdot y^{-1} \in H_1$ și $x \cdot y^{-1} \in H_2 \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in H_1 \cap H_2$).
Deci $6\mathbf{Z} \cap 8\mathbf{Z}$ este subgrup al lui $\mathbf{Z}$ ($6\mathbf{Z} \cap 8\mathbf{Z} = 24\mathbf{Z}$).
Din $6 \in 6\mathbf{Z} \cup 8\mathbf{Z}$ și $8 \in 6\mathbf{Z} \cup 8\mathbf{Z}$, dacă presupunem că $6\mathbf{Z} \cup 8\mathbf{Z}$ este subgrup al lui $\mathbf{Z} \Rightarrow 6 + 8 = 14 \in 6\mathbf{Z} \cup 8\mathbf{Z}$.
Deci $6\mathbf{Z} \cup 8\mathbf{Z}$ nu este subgrup al lui $\mathbf{Z}$.

109. Evident f este bijectivă. Dacă f este automorfism, fie $a, b \in G$; $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.
Dar $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$. Deci $a^{-1} \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} \Rightarrow (a^{-1} \cdot b^{-1})^{-1} = (b^{-1} \cdot a^{-1})^{-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow b \cdot a = a \cdot b$ deci $(G, \cdot)$ este grup comutativ).
Reciproc, dacă $(G, \cdot)$ este grup comutativ, fie $a, b \in G$.

$$f(a \cdot b) = (a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1} = f(a) \cdot f(b).$$

Deci f este endomorfism. Cum f este bijectivă $\Rightarrow$ f este automorfism.

110. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, $(\forall)\, x, y \in \mathbf{Q}$.
Pentru $y = x$ obținem:

$$f(2x) = (f(x))^2 > 0 \Rightarrow f(x) = f^2\left(\frac{x}{2}\right) > 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{Q} \Rightarrow f(x) = a^{g(x)},\ a > 0.$$

Dacă $a = 1 \Rightarrow f(x) = 1$. Dacă $a \neq 1$,

$$f(x + y) = a^{g(x+y)} = f(x) \cdot f(y) = a^{g(x)+g(y)} \Rightarrow g(x + y) = g(x) + g(y)$$

$$(\forall)\, x, y \in \mathbf{Q} \Rightarrow g(x) = k \cdot x,\ k \in \mathbf{Q}.$$

Deci $f(x) = a^{kx} = b^x$, $b > 0$.

111. $x \cdot y \cdot x \cdot y \cdot x \cdot y = x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \Rightarrow (y \cdot x)^2 = x^2 \cdot y^2$ (1)

Analog deducem $(y \cdot x)^3 = x^3 \cdot y^3$ (2)

$(y \cdot x)^4 = x^4 \cdot y^4$ (3)

Din (1) și (2) rezultă: $x^2 \cdot y^2 \cdot y \cdot x = x^3 \cdot y^3 \Rightarrow y^3 \cdot x = x \cdot y^3$

Din (2) și (3) rezultă: $x^3 \cdot y^3 \cdot y \cdot x = x^4 \cdot y^4 \Rightarrow y^4 \cdot x = x \cdot y^4$

Deci: $y \cdot (y^3 \cdot x) = y \cdot (x \cdot y^3) = x \cdot y^4 \Rightarrow y \cdot x = x \cdot y$.

Scanned with OKEN Scanner

112. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu $|G| = 4$. Dacă $(\exists)\, x \in G$ a.î. ord $x = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow G = \{e, x, x^2, x^3,\} \cong \mathbf{Z}_4$.
În caz contrar, fie $x \in G \setminus \{e\} \Rightarrow$ ord $x = 2$ (din t. lui Lagrange rezultă ord $x \mid 4$).
Deci $x^2 = e$, $(\forall)\, x \in G \Rightarrow (G, \cdot)$ este grup comutativ.
Fie $H = \{e, x\}$ şi $y \in G - H$ atunci $G = \{e, x, y, x \cdot y\}$ căci:

$x \cdot y = e \Rightarrow y = x^{-1} = x$!

$x \cdot y = x \Rightarrow y = e$!

$x \cdot y = y \Rightarrow x = e$!

Din tabla lui G rezultă că $G \cong K$, unde K este grupul lui Klein $\Rightarrow G \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ şi $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \ncong \mathbf{Z}_4$.
Deci există doar două tipuri de grupuri cu 4 elemente.

113. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu $|G| = 6$. Dacă $\exists x \in G$ a.î. ord $x = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow G < x > = \{e, x, x^2, x^3, x^4, x^5\} \simeq \mathbf{Z}_6$.
Dacă $(\forall)\, x \in G \setminus \{e\}$, ord$x \neq 6$; ord $x \mid 6$ (din t. lui Lagrange) deci ord $x \in \{2, 3\}$.
Dacă $(\forall)\, x \in G \setminus \{e\}$ avem $x^2 = e$; fie $y \in G$, $y \neq x \Rightarrow (G, \cdot)$ e grup comutativ şi $H = \{e, x, y, x \cdot y\} \leq G \Rightarrow 4 \mid 6$!
Deci $(\exists)\, x \in G$, ord $x = 3 \Rightarrow H = \{e, x, x^2\} = < x >$.
Fie $y \in G - H$; $Hy = \{y,\ x \cdot y,\ x^2 \cdot y\}$.
$H \cap Hy = \varnothing \Rightarrow [G : H] = 2 \Rightarrow H$ este subgrup normal al lui $G \Rightarrow$
$\Rightarrow G/_H = \{H, Hy\} \Rightarrow (Hy)^2 = Hy^2 = H \Rightarrow y^2 \in H$.
Arătăm că ord $y = 2$. Dacă ord $y = 3 \Rightarrow y^3 = e$. Cum $y^2 \in H \Rightarrow y^2 = x$ sau $y^2 = x^2$.
Dacă $y^2 = x \Rightarrow x \cdot y = e \Rightarrow y = x^{-1} = x^3 \in H$!
Dacă $y^2 = x^2 \Rightarrow x^2 \cdot y = e \Rightarrow y = x$!
Deci ord $y = 2 \Rightarrow G = \{e,\ x,\ x^2,\ y,\ x \cdot y,\ x^2 \cdot y\}$.
Analog ord $x \cdot y$ = ord $x^2 \cdot y = 2 \Rightarrow (x \cdot y)^2 = e \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \cdot y = y^{-1} \cdot x^{-1} = y \cdot x^2\,;\ \left(x^2 \cdot y\right)^{-1} = x^2 \cdot y = y^{-1} \cdot x^{-2} = y \cdot x\,.$$

Fie $\sigma = (1\,2\,3)$, $\tau = (1, 2) \in S_3 \Rightarrow S_3 = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma \circ \tau, \sigma^2 \circ \tau) \cong G$.
Deci $G \cong \mathbf{Z}_6$ sau $G \cong S_3$.

114. 1) Fie $(K, +, \cdot)$ un corp şi $x, y \in K$, $x \neq 0$ a.î. $x \cdot y = 0$. Înmulţind cu x^{-1} la stânga obţinem $y = 0$ deci K este inel integru. Reciproca este falsă.
Contraexemplu: $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$.

2) Dacă p este prim orice element din $\mathbf{Z}_p^*$ este inversabil ($(a, p) = 1 \Rightarrow \hat{a}$ inversabilă) deci $(\mathbf{Z}_p, +, \cdot)$ este corp. Reciproc, dacă $\mathbf{Z}_p$ este corp să presupunem că p nu este număr prim $\Rightarrow p = m \cdot n$, $1 < m < p$, $1 < n < p$.
Trecând la clase obţinem: $\hat{0} = \hat{m} \cdot \hat{n}$. Cum $\hat{m} \in \mathbf{Z}_p^* \Rightarrow (\exists)\, \hat{m}^{-1}$ şi înmulţind cu aceasta obţinem: $\hat{0} = \hat{n}$!. Deci p este număr prim.

Scanned with OKEN Scanner

$\mathbf{Z}_p$ corp $\Rightarrow \mathbf{Z}_p$ inel integru. Reciproca e adevărată deoarece orice domeniu de integritate finit este corp.

115. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0\\ 0, & 0\le x<2\\ \sin x, & x\ge 2.\end{cases}$

Cum f este mărginită și discontinuă în $x=0$ și $x=2 \Rightarrow f$ integrabilă pe $[-\pi,\pi]$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{0}\cos x dx+\int_{0}^{2}0\cdot dx+\int_{2}^{\pi}\sin x\,dx=+\sin x\Big|_{-\pi}^{0}-\cos x\Big|_{2}^{\pi}=1+\cos 2\,.$$

116. Fie $0<a<b<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{ctg} a>\operatorname{ctg} b>0$ și $x\in[0,1] \Rightarrow 2x(\operatorname{ctg} a-1)>2x(\operatorname{ctg} b-1)\Rightarrow$

$$\Rightarrow (x+1)^2+2x(\operatorname{ctg} a-1)>(x+1)^2+2x(\operatorname{ctg} b-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2+2x(\operatorname{ctg} a-1)}<\frac{1}{(x+1)^2+2x(\operatorname{ctg} b-1)} \Rightarrow I(a)<I(b).$$

(am utilizat și monotonia integralei).

Din: $\frac{1}{10}<\frac{1}{\sqrt{10}}<\frac{10}{31}\Rightarrow I\left(\frac{1}{10}\right)<I\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)<I\left(\frac{10}{31}\right)$.

117. Vom utiliza egalitatea (1):

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx\,. \qquad (1)$$

Făcând schimbarea de variabilă $a+b-x=y \Rightarrow dy=-dx$ și

$$\int_a^b f(a+b-x)dx=-\int_b^a f(y)dy=\int_a^b f(y)dy\,.$$

Integrând în relația dată obținem:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_a^b f(a+b-x)dx=c(b-a) \qquad (2)$$

Pentru $x=a \Rightarrow f(a)+f(b)=c$ (3)

Din (1), (2), (3) obținem:

$$2\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\big(f(a)+f(b)\big)\Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)\,.$$

Pentru:

$$x=\frac{a+b}{2}\Rightarrow f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)=c\Leftrightarrow f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{c}{2} \qquad (4)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (1), (2) şi (4) obţinem:

$$2\int_a^b f(x)\,dx = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

118. Vom arăta că f nu are proprietatea Darboux $\Rightarrow$ f nu admite primitive.

Fie $a=\sqrt{3}<2<\sqrt{5}=b$ şi $\lambda=4\in[3,5]$.
Dacă $x\in[a,b]\cap\mathbf{Q} \Rightarrow f(x)\neq 4=\lambda$.
Dacă $x\in[a,b]-\mathbf{Q} \Rightarrow f(x)=x^2\neq 4=\lambda$, deci f nu are proprietatea Darboux.

119. $$\int \frac{x}{1+x+e^x}\,dx = \int \frac{1+x+e^x-(1+e^x)}{1+x+e^x}\,dx = x-\int \frac{(1+x+e^x)'}{(1+x+e^x)}\,dx =$$

$$= x-\ln(1+x+e^x)+c.$$

120. Fie $g\colon[0,1]\to\mathbf{R}$, $g(x)=x^5$, $(\forall)\,x\in[0,1]$. g continuă $\Rightarrow$ g integrabilă şi g admite primitive.

Cum $g(x)=f(x)$, $(\forall)\,x\in[0,1]-\left\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n}\right\} \Rightarrow f$ integrabilă şi

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{x^6}{6}\Big|_0^1=\frac{1}{6}.$$

121. Notăm $\varphi(x)=5\cos x+2\sin x$.

Determinăm constantele $A, B\in\mathbf{R}$ a.î. $3\cos x+7\sin x=A\cdot\varphi(x)+B\cdot\varphi'(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\cos x+7\sin x=5A\cos x+2A\sin x-5B\sin x+2B\cos x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5A+2B=3\\2A-5B=7\end{cases} \Rightarrow A=1 \text{ şi } B=-1.$$

Deci $$I=\int\frac{\varphi(x)-\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=x-\ln|5\cos x+2\sin x|+C.$$

122. $$\int\frac{1}{x(x^6+1)}dx=\int\frac{x^5}{x^6(x^6+1)}dx=\frac{1}{6}\int\frac{6x^5}{x^6(x^6+1)}dx.$$ Notând $y=x^6$ obţinem:

$$\frac{1}{6}\int\frac{dy}{y(y+1)}dx=\frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}\right)dy=\frac{1}{6}\ln\frac{y}{y+1}+C=\frac{1}{6}\ln\frac{x^6}{x^6+1}+C.$$

123. $$\int\frac{1}{2^x+3}dx=\frac{1}{3}\int\frac{3}{2^x+3}dx=\frac{1}{3}\int\frac{3+2^x-2^x}{2^x+3}dx=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3\ln 2}\cdot\ln(2^x+3)+C.$$

Scanned with OKEN Scanner

124. $f(-x) = -f(x)$, $(\forall)\, x \in [-1, 1]$ deci f este impară, f continuă $\Rightarrow$ f integrabilă.

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$.

125. 1) $f \circ f = 1_{\mathbf{R}} \Rightarrow f$ este bijectivă și $f = f^{-1}$.

2) $f(1) = 1$, $f(2) = 0$, $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \in (0,1)$; $(\forall)\, x \in (1, 2) \Rightarrow f(x) \neq \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ deci f nu are PD $\Rightarrow$ f nu admite primitive.

3) Fie $x_n \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \cap [0, 1]$, $x_n \xrightarrow[n]{} 0 \Rightarrow f(x_n) \to +\infty$ deci f nu e mărginită pe $[0, 1] \Rightarrow f$ nu e integrabilă.

126. Integrând prin părți obținem:

$$I_n = -\frac{n^2}{e^n} - \frac{2n}{e^n} - \frac{2}{e^n} + 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} I_n = 2.$$

127. $\int_0^x \dfrac{t^2}{t^2+1}\,dt = \int_0^x \dfrac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt = x - \operatorname{arctg} t \Big|_0^x = x - \operatorname{arctg} x$.

Definim funcția f: $[0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$; f continuă $\Rightarrow$ f are P.D. $f(0) = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = +\infty$;

$$\lambda = \frac{1}{3} \in [0,+\infty) \Rightarrow (\exists)\, x \in (0,+\infty) \text{ a.î. } f(x) = \lambda = \frac{1}{3}.$$

128. $4x^2 + 8x + 5 = 4(x + 1)^2 + 1$. Facem în a doua integrală schimbarea de variabilă $y = x + 1$, $dy = dx \Rightarrow I_2 = \int_{-2}^{2} \sqrt{4y^2+1}\,dy$.

129. f continuă pe $[0, 1] \Rightarrow$ f este mărginită.

$m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$; $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$; $m \le f(x) \le M$, $(\forall)\, x \in [a, b]$

$$m \cdot x^n \le x^n \cdot f(x) \le M \cdot x^n \Rightarrow \frac{m}{n+1} \le I_n \le \frac{M}{n+1} \Rightarrow \lim_n I_n = 0.$$

130. $\max(x, x^3) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ x^3, & x \in (1,2]. \end{cases}$

$$I = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 x^3\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + 4 - \frac{1}{4} = \frac{17}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

131. $1 \le \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\forall)\ n \ge 1$.

$$\frac{1}{2} \le I \le \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}.$$

132. Se arată că $x \cdot \operatorname{arctg} x > \ln(1+x^2)$, $(\forall)\ x > 0$ apoi se utilizează proprietatea de monotonie a integralei definite.

133. $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Integrând prin părți, pentru $(\forall)\ n \ge 3$ se obține: $I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$.

134. Fie $g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$; g continuă $\Rightarrow$ g este integrabilă şi g admite primitive.

Fie $G' = g$. Aplicând formula lui Leibniz – Newton obținem:

$$F(x) = G(t) \Big|_{x^2}^{x^3} = G(x^3) - G(x^2),$$

$$F'(x) = g(x^3)3x^2 - g(x^2)2x = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}.$$

135. $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}$. Definim funcția: $f : (0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, f continuă:

$$\lim a_n = \int_{0+0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c \searrow 0} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$$

136. $\int_0^x \sin^2 t\,dt = \int_0^x \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x \Rightarrow l = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x}{x} = \frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

137. 1) $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ x, & x\in(0,1].\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0\neq f(0)\Rightarrow x=0$ punct de discontinuitate de speța I pentru $f\Rightarrow f$ nu are P.D. $\Rightarrow f$ nu admite primitive.

Definim $g:[0,1]\to\mathbf{R}$, $g(x)=x$, $(\forall)\,x\in[0,1]$, g este continuă $\Rightarrow$ g este integrabilă și $f(x)=g(x)$, $(\forall)\,x\in[0,1]-\{0\}\Rightarrow f$ este integrabilă și

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 g(x)dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}.$$

2) Fie $F:[0,1]\to\mathbf{R}$,

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x\sin\dfrac{1}{x^2}=0=F'(0)$. F derivabilă pe $[0,1]$, $f=F'$;

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1'}{x^2}, & x\in(0,1)\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

f admite primitivă pe F; Fie $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}\xrightarrow{n}0$

$f(x_n)=-2\sqrt{2n\pi}\to-\infty\Rightarrow f$ nu e mărginită pe $[0,1]\Rightarrow f$ nu este integrabilă.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

Teste propuse pentru examenul de bacalaureat

ENUNȚURI

Testul nr. 1

(profil: matematică - fizică, informatică, metrologie)

I. a) Fie $A \in \mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_6)$, atunci matricea A este inversabilă dacă şi numai dacă $\det(A) \in \{\hat{1}, \hat{5}\}$.

b) Fie $B \in \mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_6)$, $B = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix}$. Arătați că B este inversabilă şi calculați B^{-1}.

c) Rezolvați în $\mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_6)$ ecuația $B \cdot X = A$ unde

$$B = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix} \text{ şi } A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{3} \end{pmatrix}.$$

II. Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ se consideră funcția $f_n : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(\ln x)^n}{x^2}$ şi se notează cu C_n curba reprezentativă a lui f_n într-un reper cartezian xOy iar $I_n = \int_1^e f_n(x)dx$.

a) Reprezentați grafic C_1 şi C_2 în acelaşi sistem de axe.

b) Calculați aria domeniului cuprins între C_1, C_2 şi dreptele de ecuații $x = 1$ şi $x = e$.

c) Arătați că $I_{n+1} = -\dfrac{1}{e} + (n+1) \cdot I_n$ apoi că are loc egalitatea:

$$\frac{1}{n!} \cdot I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right), \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

d) Arătați că $0 \le I_n \le 1$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ şi deduceți

$$\lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right).$$

III. În planul complex raportat la un reper cartezian xOy se consideră A ca fiind punctul de afix i. Oricărui punct din plan de afix z, $(z \neq i)$ i se asociază un

Scanned with OKEN Scanner

punct M' de afix z', definit prin $z' = \frac{z^2}{i - z}$.

a) Se notează $z = x + iy$, $z \neq i$ şi $z' = x' + i \cdot y'$.

Arătați că $x' = \frac{-x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (1-y)^2}$.

b) Deduceți mulțimea E a punctelor M care au imaginea M' situată pe axa imaginară. Reprezentați în plan mulțimea E.

c) Fie M un punct de afix z situat pe cercul de centru A şi rază $\frac{1}{2}$, M' punctul de afix z' corespunzător şi G centrul de greutate al triunghiului AMM'. Calculați afixul z_G al lui G în funcție de z şi arătați că G este situat pe un cerc de centru O căruia i se va preciza raza.

Testul nr. 2

(profil: matematică - fizică, informatică, metrologie)

I. a) Se consideră numărul complex $z = \frac{-2 + 14i}{3 + 4i}$.

Calculați numărul $w = z^{50}$ şi determinați apoi $n \in \mathbf{N}^*$ minim pentru care $w^n \in \mathbf{R}$.

b) Fie $(G, \cdot)$ un grup multiplicativ necomutativ şi notăm

$$H = \{a \in G \mid ax = xa,\ (\forall) x \in G\}.$$

Să se arate că H este subgrup al lui G şi să se determine acest subgrup în cazul în care

$$G = \{A \in \mathbf{M}_2(R) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

II. a) Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbf{Z}_3$ polinomul $f \in \mathbf{Z}_3[X]$,

$$f(X) = \hat{2}X^4 + \hat{2}X^3 + X^2 + \hat{2}.$$

b) Determinați numărul numerelor de patru cifre ce se pot forma cu cifrele impare; câte dintre acestea au cifre distincte?

c) Scrieți ecuațiile cercurilor tangente la dreapta (d): $y = 3x + 5$ în punctul $P(1, 8)$, cercuri ce au centrul la distanță de 3 unități de axa Ox.

Scanned with OKEN Scanner

III. Fie $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, considerăm funcția $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = e^{nx} - n \cdot e \cdot x - 1$

a) Precizați semnul numărului $f_n\left(\frac{2}{n}\right)$.

b) Studiați variația şi trasați graficul funcției f_3.

c) Calculați aria $A(t)$ a suprafeței cuprinsă între graficul funcției f_3, asimptota oblică şi dreptele $x = -t$, $x = 0$ unde $t > \frac{1}{3e}$.

Testul Nr. 3

(profil: matematică - fizică, informatică, metrologie)

I. Fie $E = \mathbf{R}^*$ şi $f_i : E \to E$, $1 \leq i \leq 4$,

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = -x, \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}, \ (\forall) x \in E.$$

a) Arătați că mulțimea $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ este parte stabilă în raport cu compunerea funcțiilor şi alcătuiți tabla operației induse.

b) Deduceți că $(G, \circ)$ este grup comutativ.

c) Arătați că grupul $(G, \circ)$ este izomorf cu grupul $(K, \cdot)$ al lui Klein.

II. a) Demonstrați că $e^x \geq x + 1$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. În ce caz are loc egalitatea?

b) Rezolvați în $\mathbf{R}^3$ sistemul:

$$\begin{cases} e^x + y = 2z + 1 \\ e^y + z = 2x + 1. \\ e^z + x = 2y + 1 \end{cases}$$

c) Calculați

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n} + \operatorname{tg}\frac{2}{n} + \ldots + \operatorname{tg}\frac{n}{n}\right).$$

III. Într-un sistem ortogonal xOy se consideră punctele: $A(4, 6)$, $B(-2, 2)$, $C(2, -4)$.

a) Determinați coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC.

b) Determinați ecuația medianei AD a triunghiului ABC.

c) Determinați ecuația înălțimii AA' a triunghiului ABC.

Scanned with OKEN Scanner

Testul Nr. 4

(profil: matematică–fizică, informatică, metrologie)

I. 1) Pe mulțimea $\mathbf{R}^3 = \{X \mid X = (x_1, x_2, x_3), x_i \in \mathbf{R}\}$ se definește legea de compoziție $(X,Y) \to X + Y \overset{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$.

Să se arate că $(\mathbf{R}^3, +)$ este grup abelian.

2) Fie sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = \alpha \\ x - 2y - z = 0, \\ 2x + \beta y + 2y = 0 \end{cases} \quad x, y, z \in \mathbf{R}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

a) Să se determine α, şi β astfel încât sistemul să admită soluție unică.

b) Să se determine α şi β a.î. sistemul să fie compatibil nedeterminat. Să se precizeze în acest caz, S = mulțimea soluțiilor sistemului ($S \subset \mathbf{R}^3$).

c) Să se arate că $(S, +)$ este un subgrup al grupului $(\mathbf{R}^3, +)$.

II. Fie funcția f: $\mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{|1-x|}}{x}$.

a) Să se reprezinte grafic funcția f.

b) Să se separe rădăcinile reale ale ecuației $\sqrt{1-x} = \lambda x$.

c) Să se precizeze numărul punctelor graficului situate la distanțe egale cu 1 de axa Ox.

Testul Nr. 5

(profil matematică-fizică, informatică, metrologie)

I. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{|x^2 - 1|}{x^2 + 1}$.

a) Studiați continuitatea funcției f.

b) Să se determine variația şi să se reprezinte grafic funcția f.

c) Să se calculeze aria triunghiului care are ca vârfuri punctele de extrem ale graficului.

Scanned with OKEN Scanner

II. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\ln(x^2+1)+a, & x<0\\ x^2\cdot e^x, & x\geq 0\end{cases}$.

a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,e)$.

b) Să se determine valorile parametrului real a astfel încât funcția f să admită primitive pe $\mathbf{R}$, și în acest caz să se determine primitivele ei.

c) Pentru $a=0$ să se determine aria domeniului plan limitat de graficul funcției f, axa $x'x$ și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$.

III. Fie mulțimile: $M=\left\{\begin{pmatrix}a & 3b\\ b & a\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbf{Q},\ a^2-3b^2=1\right\}$,

$$L=\left\{a+b\sqrt{3}\,\middle|\,a,b\in\mathbf{Q}\text{ și }a^2-3b^2=1\right\}.$$

a) Să se arate că înmulțirea matricilor determină pe M o structură de grup comutativ.

b) Să se arate că înmulțirea numerelor reale determină pe L o structură de grup comutativ.

c) Să se arate că grupurile $(M,\cdot)$ și $(L,\cdot)$ sunt izomorfe.

Testul Nr. 6

(profil: matematică-fizică, informatică, metrologie)

I. Să se discute și să se rezolve sistemul în $\mathbf{R}$: $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\ \alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3=\lambda\\ \alpha^2x_1+\beta^2x_2+\gamma^2x_3=\lambda^2.\end{cases}$

II. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\lambda}+\dfrac{\lambda}{\sqrt{x+1}}$, $\lambda>0$.

a) Să se arate că f are un minim independent de λ.

b) Pentru orice $\lambda>0$, să se demonstreze că f are un unic punct de inflexiune.

c) Pentru $\lambda=1$, să se reprezinte grafic funcția f.

Scanned with OKEN Scanner

III. a) Demonstrați că grupurile $(\mathbf{R}_+^*, \cdot)$ și $(\mathbf{R}, +)$ sunt izomorfe.

b) Demonstrați că grupurile $(\mathbf{Q}_+^*, \cdot)$ și $(\mathbf{Q}, +)$ nu sunt izomorfe.

c) Să se determine locul geometric al intersecției dreptelor de ecuații:
$x = \cos\alpha + 2$, $y = -\sin\alpha - 1$.

Testul Nr. 7

(profil: matematică-fizică, informatică, metrologie)

I. 1) Să se discute după valorile parametrului real m și să se determine soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} x - my + z = m \\ x + y + z = -1 \\ mx + y - m^2 z = 1 \end{cases}$$

2) Fie $G = \{A \mid A \in \mathbf{M}_3(\mathbf{R})\}$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbf{R}$.

Să se arate că:
a) G este parte stabilă a lui $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea.
b) $(G, \cdot)$ este grup izomorf cu $(\mathbf{R}, +)$.

II. Fie ecuația $x^4 + (2a+1)x^3 + 2(a+1)^2x^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbf{R}$ cu $a \geq 0$. Să se arate că această ecuație admite cel mult două rădăcini reale.

III. 1) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x^2 + 4x + m)e^x$, m fiind un parametru real.
a) Să se determine m astfel încât funcția f să admită puncte de extrem.
b) Pentru $m = 4$, să se studieze variația și să se construiască graficul funcției f.
c) Pentru $m = 4$ să se calculeze aria mărginită de graficul funcției f, graficul funcției $g : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $g(x) = e^x$ și dreptele de ecuații $x = 2$ și $x = 3$.

2) Se definesc elementele șirului de funcții $(f_n)_n \in \mathbf{N}$ astfel $f_1(x) = 1$,

$f_{n+1}(x) = \int_1^x f_n(t)\,dt$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n+1}(2)$.

Scanned with OKEN Scanner

Testul Nr. 8

(profil: matematică-fizică, informatică, metrologie)

I. 1) Fie $A=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ \beta & 0\end{pmatrix}$ o matrice din $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$.

a) Să se arate că dacă $x_0I + x_1A + x_2A^2 = 0$, $(I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, iar $x_0, x_1, x_2 \in \mathbf{R}$), atunci $x_1 = -\alpha x_2$, $x_0 = -\beta x_2$;

b) Să se determine α, β astfel încât $(A - I)^2 = 0$;

c) Să se determine α, β astfel încât $A^2 = I$.

2) Fie T mulțimea tuturor matricilor de forma $\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}$ unde $x, y \in \mathbf{Z}_3$.

a) Să se determine numărul elementelor mulțimii T.

b) Să se determine mulțimea G a matricilor $\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}$ din T, astfel încât $x^2 + y^2 = \hat{1}$.

c) Arătați că $(G, \cdot)$ formează grup; ("$\cdot$" este operația de înmulțire a matricilor).

d) Să se arate că $(G, \cdot) \cong (\mathbf{Z}_4, +)$.

II. Fie funcția $f: [0, 1] \to [0, 1] \cup [2, 3]$ continuă, astfel încât $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Să se arate că:

a) f nu este surjectivă;

b) f nu este strict crescătoare;

c) f nu este injectivă.

III. Să se arate că curbele $y = \sin^n x$ (n, număr natural ≥ 2) au câte un punct de inflexiune $N_n(x_n, y_n)$, $x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Scanned with OKEN Scanner

Testul Nr. 9

(profil: matematică-fizică, informatică, metrologie)

I. Fie $G=\left\{\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid a\in\mathbf{R}\right\}$.

a) Să se arate că G este parte stabilă a mulțimii $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

b) Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

c) Determinați $X\in G$ astfel încât $\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & c\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ unde $a, b, c\in\mathbf{R}$.

d) Să se arate că funcția $f:\mathbf{R}\to G$, $f(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ este izomorfism între grupurile $(\mathbf{R},+)$ și $(G,\cdot)$.

II. a) Să se arate că funcția $f:\mathbf{R}-\{-c\}\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x+c}$ admite două puncte de extrem oricare ar fi $a, b, c\in\mathbf{R}$ ce îndeplinesc condiția $b>a\cdot c$.

b) Să se determine a, b, c astfel încât graficul să admită ca asimptote dreptele de ecuații $x=1$, $y=x+2$ iar punctul $P(2, 6)$ să aparțină graficului funcției f.

c) Să se studieze variația funcției $f:\mathbf{R}-\{1\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}$ și să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x=0$.

d) Să se calculeze aria suprafeței limitată de graficul funcției, axa Ox și dreptele de ecuații: $x=-1$ și $x=0$.

III. a) Să se găsească ecuațiile laturilor unui triunghi ABC la care dreptele de ecuații $2x-3y+1=0$ și $x+y=0$ sunt înălțimi iar $A(1, 2)$ este unul din vârfuri.

b) Să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului ABC.

Scanned with OKEN Scanner

Testul Nr. 10

(profil: matematică - fizică, informatică, metrologie)

I. Fie mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbf{R}\right\}$.

a) Arătați că înmulțirea matricelor este operație algebrică pe M și că $(M,\cdot)$ este grup.

b) Arătați că $H=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \mid a\in\mathbf{R}\right\}$ este subgrup al grupului $(M,\cdot)$ și este izomorf cu $(\mathbf{R},+)$ - grupul aditiv al numerelor reale.

c) Determinați $X\in M$ știind că $X^n\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ unde $n\in\mathbf{N}^*$, fixat.

II. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$, unde $a\in\mathbf{R}$.

a) Arătați că pentru $a\in(-2,2)$, f admite trei puncte de extrem local.
b) Pentru $a=2$ studiați variația funcției f și trasați graficul funcției.
c) Pentru $a=2$ calculați aria domeniului delimitat de graficul lui f, axa Ox și dreptele verticale $x=0$ și $x=1$.

III. Fie polinomul $f=X^{11}+X^{10}+X^5+X^4+2\in\mathbf{C}[X]$.

a) Rezolvați ecuația $x^2+x+1=0$ în $\mathbf{C}$.
b) Arătați că X^2+X+1 divide f.
c) Determinați restul împărțirii lui f la X^2-1.

Scanned with OKEN Scanner

Testul Nr. 11

(profil economic)

I. Se consideră sistemul: $\begin{cases} ax + y + 2z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ 2x + 2y + az = 0 \end{cases}$, unde $a \in \mathbf{R}$.

1) Pentru ce valori ale lui a sistemul are soluție unică?
2) Să se rezolve sistemul pentru $a = 1$.

II. 1) Fie $f : E \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \frac{ax^4}{(b+cx)^3}$; a, b, c fiind numere reale, iar E domeniul maxim de definiție al lui f. Să se găsească a, b, c astfel încât graficul funcției f să admită ca asimptotă dreapta $y = x - 3$.
2) Pentru $a = b = c = 1$, să se studieze variația funcției f și să se reprezinte grafic.
3) Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției, axa Ox și dreptele de ecuații: $x = 1$ și $x = 2$.
4) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul $x = 1$.
5) Să se discute rădăcinile ecuației $f(x) = m$, unde m este un parametru real.

III. Se consideră punctele $A(0, 4)$, $B(6, 0)$. Scrieți ecuația dreptei AB și a mediatoarei segmentului AB. Pentru cercul ABO scrieți ecuația și determinați raza și centrul acestuia.

Testul Nr. 12

(profil economic)

I. Fie $a \in (0, 1)$ și $f_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o familie de funcții de gradul doi

$$f_m(x) = x^2 \log_m a - x \log_a m + 3\log_a m - 4,$$

unde $m \in (0, \infty)$ este un parametru, $m \neq 1$.

a) Să se reprezinte grafic funcția f_a.
b) Dacă se notează $\log_a m = u$, pentru m fixat să se determine Δ_m în funcție de u.
c) Să se determine mulțimea funcțiilor din familia dată, cu proprietatea că $f_m(x) < 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

II. Fie $A=\left\{A_a=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \mid a\in \mathbf{C}\right\}$.

a) Să se calculeze $B=\sum_{k=1}^{n} A_a^k$, $n\in \mathbf{N}^*$, $a\in \mathbf{C}$.

b) Să se arate că $A_a + A_b = A_{a+b}$ şi $A_a \cdot A_b = A_{2ab}$, $(\forall)\ a, b \in \mathbf{C}$.

c) Să se arate că $(A, +, \cdot)$ este un inel comutativ ("+" şi " $\cdot$ " sunt operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire a matricelor).

d) Să se arate că inelul de la c) nu are divizori ai lui zero.

e) Este funcţia $f: \mathbf{C} \to A$, $f(a) = A_a$ un izomorfism de inele?

III. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+|x|}$.

a) Să se scrie ecuaţiile tangentelor la graficul funcţiei f care trec prin $A(1,\sqrt{2})$ respectiv $B\left(\frac{1}{4},0\right)$.

b) Să se reprezinte grafic funcţia f.

c) Să se determine aria mulţimii plane cuprinsă între dreptele $x = 0$, $y=x+\frac{1}{2}$, $x=1$ şi graficul lui f.

Testul Nr. 13

(profil economic)

I. 1) Să se discute şi să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} mx+(m+1)y+(m+2)z=1 \\ (m+2)x+my+(m+1)z=2 \\ (m+1)x+(m+2)y+mz=3 \end{cases}, \ m\in \mathbf{R}.$$

2) Fie polinomul $f\in \mathbf{C}[X]$, $f=X^{2n}+X^{2n-1}+\ldots+X^2+X+1$ şi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{2n}$ rădăcinile sale. Se cere:

a) Să se arate că $G=\{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{2n}\}$ formează un grup multiplicativ comutativ.

Scanned with OKEN Scanner

b) Grupul $(G, \cdot)$ de la a) este izomorf cu grupul $(\mathbf{Z}_{2n+1}, \oplus)$?
($\mathbf{Z}_{2n+1}$ este mulțimea claselor de resturi modulo $(2n+1)$).

II. Fie mulțimea $A = \{(x, y) \mid (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 16, (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\}$ și mulțimea $B = \{(x, y) \mid 2x - 3y \leq 6, (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\}$. Să se găsească $A \cap B$.

III. Fie funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x+1}$, $a, b, c \in \mathbf{R}^*$.

1) Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}^*$ știind că graficul funcției f admite ca asimptotă oblică dreapta $y = 2x - 7$ și trece prin $A(2, 0)$.
2) Pentru $a = 2$, $b = -5$, $c = 2$, să se studieze variația și să se traseze graficul funcției f.
3) Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de graficul funcției, asimptota verticală și dreptele $y = 0$ și $y = 2$.

Testul Nr. 14

(profil economic)

I. Se dă funcția $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)$, unde D este domeniul maxim de definiție.

1) Să se studieze variația funcției și să se reprezinte grafic:
2) Să se calculeze limita șirului cu termenul general:
$a_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$, $n \geq 1$.
3) Să se calculeze aria (Γ_f) pentru $x \in [1, 2]$.
4) Să se discute rădăcinile reale ale ecuației $f(x) = m$, după valorile parametrului real m.

II. Fie mulțimea matricelor de forma $M(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 1 & -\dfrac{\lambda^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde λ este parametru real.

1) Să se arate că M este grup abelian în raport cu înmulțirea.
2) Dacă determinantul matricei $M(\lambda)$ este 1, atunci și determinantul matricei $M(-\lambda)$ este 1.
3) Aplicația $f: (\mathbf{R}, +) \to (M, \cdot)$ definită prin $f(\lambda) = M(\lambda)$ este izomorfism de grupuri.
4) Folosind, eventual, rezultatul de la 3), să se calculeze $[M(\lambda)]^n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

III. Se consideră punctele $A(3, 0)$, $B(4, 2)$ şi $C(0, 4)$.

1) Să se calculeze aria triunghiului ABC.

2) Să se determine locul geometric al punctului de intersecţie al dreptelor variabile duse prin A şi C care sunt perpendiculare una pe alta.

Testul Nr. 15

(profil economic)

I. 1) Fie funcţia $f : D \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \cdot \ln(x-1)$, unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei.

a) Să se determine D şi să se arate că graficul funcţiei admite un singur punct de inflexiune.

b) Să se reprezinte grafic funcţia $f : D \to \mathbf{R}$.

c) Să se calculeze aria mărginită de graficul funcţiei f, axa Ox, dreptele

$$x = \frac{3}{2} \text{ şi } x = 3.$$

2) Să se demonstreze ingalitatea fără a calcula efectiv integrala

$$0 \le \int_1^e \ln^3 x \, dx \le e - 1.$$

II. Fie $G = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi legea de compoziţie $x * y \overset{\text{def}}{=} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y)$, $(\forall)\ x, y \in G$.

a) Demonstraţi că $(G, *)$ este grup abelian.

b) Arătaţi că: $(G, *) \cong (\mathbf{R}, +)$.

III. 1) a) Fiind dat polinomul $P(X) = X^2 + pX + q$, să se determine parametrii reali p, q astfel încât $P(X^2 + 1)$ să se dividă cu $P(X)$.

b) Să se calculeze $S = Q(1) + Q(2) + \ldots + Q(n)$, unde $Q(X)$ este câtul împărţirii lui $P(X^2 + 1)$ la $P(X)$.

2) Fie sistemul:

$$(S)\begin{cases} -x + 2y + z = 4 \\ 3x - y + 7z = 2 \\ \alpha x + 9y - 3z = l \\ 2x + \beta y + 4z = m \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se determine parametrii reali α, β, l, m astfel încât matricea sistemului (S) să aibă rangul 2 şi sistemul să fie compatibil.
b) Să se determine soluția sistemului pentru valorile parametrilor determinate la punctul a).

Testul Nr. 16

(profil economic)

I. 1) Se dă sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 4x + my = 0 \\ y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$, unde m este un parametru real.

Să se determine valoarea lui m pentru care sistemul admite soluții diferite de soluția nulă şi să se rezolve în acest caz.
2) Să se determine valorile lui $a \in \mathbf{R}$ pentru care ecuația $x(x+1)(x+2)(x+3) = a$, are toate soluțiile reale şi diferite.

II. 1) a) Să se demontreze că pe mulțimea

$G = \{x + y\sqrt{5} \mid x \in \mathbf{Q}, y \in \mathbf{Q}, x^2 - 5y^2 = 1\}$ înmulțirea numerelor reale determină o structură de grup comutativ.

b) Să se demonstreze că pe mulțimea M a matricelor de forma

$\begin{pmatrix} x & 2y \\ \frac{5y}{2} & x \end{pmatrix}$ unde $x \in \mathbf{Q}$, $y \in \mathbf{Q}$ şi $x^2 - 5y^2 = 1$, înmulțirea matricelor determină o structură de grup comutativ.

c) Să se arate că funcția $f : G \to M$, $f(x + y\sqrt{5}) = \begin{pmatrix} x & 2y \\ \frac{5y}{2} & x \end{pmatrix}$ realizează un izomorfism între grupurile $(G, \cdot)$ şi $(M, \cdot)$.

2) Fie cercul de ecuație $x^2 + y^2 - 6x + 3y - 5 = 0$.
a) Să se determine coordonatele centrului şi raza cercului.
b) Să se scrie ecuația tangentei la cerc în punctul $A(-1, -2)$.

III. Fie funcția $f : \mathbf{R} - \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x - 1}$, $a, b \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel ca graficul funcției f să admită ca asimptotă oblică dreapta de ecuație $y = x + 2$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Pentru $a = b = 1$ să se studieze variația funcției f și să se reprezinte grafic funcția.

c) Să se calculeze aria domeniului mărginit de graficul funcției f de la punctul b), asimptota oblică și dreptele de ecuații $x = 2$ și $x = 3$.

Testul Nr. 17

(profil economic)

I. 1) Să se determine valorile parametrului real m astfel încât matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$$ să fie inversabilă pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

2) Să se afle valorile parametrului real a pentru care rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuației $x^3 - x - a = 0$ verifică inegalitatea:

$$x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 \geq x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 .$$

II. 1) Arătați că corespondența $(x, y) \to x * y \overset{\text{def}}{=} \dfrac{x+y}{1+xy}$ este o lege de compoziție pe intervalul $G = (-1, 1)$ și că $(G, *)$ este grup abelian.

2) Să se determine n astfel încât polinomul $\hat{2}X^3 + (n+\hat{2})X + \hat{1} \in \mathbf{Z}_3[X]$ să fie ireductibil în $\mathbf{Z}_3[X]$.

III. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 2ax + b}{x^2 + 1}$ ($a \neq 0$, b număr real oarecare).

1) Să se arate că există două puncte ale graficului funcției f în care tangenta este paralelă cu Ox și că produsul absciselor acestor două puncte este „–1”.

2) Să se determine a și b astfel încât $f(1) = 2$ și $f'(2) = 0$.

3) Să se reprezinte grafic funcția astfel determinată.

4) Să se afle aria mărginită de graficul funcției f, asimptota orizontală și dreptele $x = \dfrac{3}{4}$ și $x = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

Testul Nr. 18

(profil economic)

I. 1) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale, sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y-2z=-2 \\ x+4y+\alpha z=8 \end{cases}$$. Discuție după parametrul real α.

2) Fie $G = (0, \infty) - \{1\}$. Arătați că aplicația: $(x, y) \to x * y = e^{\ln x \ln y}$ este o lege de compoziție pe G și că $(G, *)$ este grup comutativ.

II. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^2 + a}{x+1}$, $a \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine a astfel încât f să admită un punct de extrem pentru $x = 1$.
b) Pentru $a = 6$ să se reprezinte grafic funcția f.
c) Să se calculeze aria domeniului plan cuprins între graficul funcției și asimptota oblică, pentru $x \in [4, 6]$.

III. Se dau punctele $A(0, 4)$, $B(3, 5)$ și dreapta $3x + 2y - 10 = 0$ și se cere:
a) Ecuația cercului ce trece prin punctele date și are centrul pe dreapta dată.
b) Ecuația tangentei la cerc.
c) Aria triunghiului având ca vârfuri: originea, punctul A și centrul cercului.

Testul Nr. 19

(profil economic)

I. 1) Să se rezolve ecuația:

$$\begin{vmatrix} x+2 & x & x \\ x & x+2 & x \\ x & x & x+2 \end{vmatrix} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x+y+az=-1 \\ ax-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$$ să fie compatibil determinat.

II. Să se demonstreze că mulțimea

$$G=\left\{\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x,y \in \mathbf{Q}, x \neq 0 \text{ sau } y \neq 0\right\}$$ are o structură algebrică de grup față de înmulțirea matricelor.

III. Se consideră funcția $f: \mathbf{R}-\{-1, 3\} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2-2x-3}$ unde a este un parametru real.

1) Să se determine parametrul a astfel încât $f'(0) = 1$.
2) Pentru $a = 1$, să se determine aria domeniului limitat de axa Ox, dreptele $x = 4$, $x = 5$ și graficul funcției f.

Testul Nr. 20

(profil economic)

I. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin:

$$f(x) = (m^3 - m^2 - m - 2)x^3 - mx + 2,\ m \in \mathbf{R}.$$

1) Să se arate că există o valoare a lui m, pentru care funcția reprezintă o dreaptă. Să se construiască această dreaptă.
2) Să se arate că pentru $0 < m < 2$, funcția dată nu admite extreme.
3) Pentru $m = 0$ și apoi pentru $m = 1$, să se studieze variația funcțiilor și să se reprezinte grafic.
4) Să se calculeze aria delimitată de graficele de la punctul 3) și de dreptele $x = 0$ și $x = 1$.

II. Pentru ce $m \in \mathbf{R}$, sistemul $\begin{cases} 4x+my=0 \\ y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$ admite soluții diferite de soluția nulă?

Scanned with OKEN Scanner

III. Fie $c \in \mathbf{Q}_+$ fixat astfel încât $\sqrt{c} \notin \mathbf{Q}$ şi corpul $C = \left\{x \in \mathbf{R} \middle| x = a + b\sqrt{c}, a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{Q}\right\}$ (față de adunarea şi înmulțirea curentă). Să se arate că aplicația $f : C \to C$ definită prin $f(a + b\sqrt{c}) = a - b\sqrt{c}$ este un izomorfism al corpului C pe corpul C.

Testul Nr. 21

(şcoli normale)

I. 1) Să se arate că numărul $a = \overline{\underbrace{44...4}_{n \text{ cifre}}\underbrace{22...2}_{n \text{ cifre}}}$ este produsul a două numere naturale consecutive.

2) Un tren este format din vagoane cu 2, 3 şi 4 osii. Numărul celor cu patru osii față de numărul celor cu două osii este în raportul 3 : 1. Numărul total al vagoanelor este 31, iar numărul total de osii este 105. Să se determine numărul de vagoane de fiecare gen în parte.

II. 1) Fie $A = \{x \in \mathbf{N} \mid nx + 2x - 4n = 0, n \in \mathbf{N}\}$ şi
$B = \{x \in \mathbf{Z} \mid 3nx + x - 6n - 7 = 0, n \in \mathbf{Z}\}$.
Să se determine: A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \times B$, $B \times A$ şi $A \Delta B$.

2) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x - 1| + 9 - x^2$.
a) Să se reprezinte grafic funcția f.
b) Să se rezolve ecuația $f(x) = 4$.

III. Pe intervalul $k = (0, \infty)$ definim legile de compoziție:

$$x \perp y = x \cdot y, \ (\forall) x, y \in k; \qquad x \,\mathrm{T}\, y = x^{\ln y}, \ (\forall) x, y \in k.$$

Arătați că tripletul $(k, \perp, \mathrm{T})$ este corp comutativ.

IV. 1) Pe cateta $[AB]$ a unui Δ dreptunghic ABC, ca diametru, se descrie un cerc ce intersectează ipotenuza în M. Să se arate că tangenta în M la cerc trece prin mijlocul celeilalte catete.

2) Se consideră triunghiul echilateral ABC cu lungimea laturii egală cu a şi linia mijlocie MN($M \in [BA]$, $N \in [AC]$). Se prelungeşte cu $[NO] \equiv [MN]$, iar în punctul O se ridică perpendiculara DO pe planul (ABC). Ştiind că lungimea lui DO este egală cu lungimea înălțimii ΔABC, se cere:
a) aria totală a piramidei $DABCO$;
b) volumul piramidei $DABCO$.

Scanned with OKEN Scanner

Testul Nr. 22

(şcoli normale)

I. Fie sistemul: $\begin{cases} 3x+y-z=5 \\ x-2y+z=p \\ mx+y+z=6 \end{cases}$, $m, p \in \mathbf{R}$.

1) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil determinat.
2) Să se stabilească valorile lui m şi p astfel încât sistemul să fie incompatibil.
3) Pentru $m = -11$ şi $p = -21/2$ să se rezolve sistemul dat.

II. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ şi legile $x*y = ax + by - 2$, $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$ oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$.

1) Să se determine a şi b astfel încât $(\mathbf{R}, *, \circ)$ să fie corp.
2) Pentru ce valori $m, n \in \mathbf{R}$, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = mx + n$ stabileşte un izomorfism de la corpul $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ la $(\mathbf{R}, *, \circ)$?

III. Să se determine numărul natural de forma $\overline{abac}$, în baza 10, cu a, b, c distincte ştiind că suma cifrelor acestui număr este egală cu numărul format din ultimele două cifre.

IV. Pentru confecţionarea unor coşuleţe, copiii au folosit întreaga cantitate de sârmă repartizată pentru această lucrare astfel:

- în prima zi 1/3 din toată sârma şi încă 0,8 m.
- a doua zi 1/3 din rest şi încă 5 dm.
- a treia zi 1/3 din noul rest şi încă 20 cm.

Să se afle lungimea totală a sârmei şi cât s-a folosit în fiecare zi.

V. Dintr-o bucată de lemn în formă de paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile bazei de 2,4 m, 1,5 m şi înălţimea de 0,6 m se scot forme cilindrice cu diametrul de 30 cm, având aceeaşi înălţime ca bucata de lemn. Câte forme se pot obţine din această bucată de lemn şi ce cantitate de lemn se pierde?

Testul Nr. 23

(şcoli normale)

I. 1) Să se rezolve ecuaţia: $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{x}$.

2) Să se determine α, β, γ astfel încât sistemul următor să fie compatibil, iar matricea sistemului să aibă rangul 2; să se rezolve apoi sistemul:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + \beta x_4 = \gamma \end{cases}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3) Pe intervalul $k = (0, \infty)$ se definesc legile de compoziție $x*y = xy$, $x \circ y = x^{\ln y}$. Să se arate că $(k, *, \circ)$ este un corp comutativ.

II. 1) Se consideră un segment AB și $M \in AB$. Se construiesc, de aceeași parte a lui AB, pătratele $AMNP$ și $BMDC$. Demonstrați că raportul $\frac{PC}{NB}$ este constant, indiferent de poziția lui M în interiorul lui AB.

2) Într-un con de rotație cu $R = 5$ și $h = 12$ se face o secțiune paralelă cu baza, cu aria egală cu 4π. Aflați: a) aria laterală a conului; b) volumul trunchiului de con format; c) aria sferei inclusă în conul inițial; d) raza sferei circumscrisă conului format.

III. 1) Să se afle toate numerele de forma $\overline{abc}$ divizibile cu 15, unde $b^2 = 2b$.

2) Suma a trei numere naturale este 1996. Aflați-le, dacă se știe că împărțindu-l pe al doilea la primul obținem câtul 3, iar împărțindu-l pe al treilea la al doilea obținem câtul 2 și restul 6.

3) Pe autostrada dintre două orașe pornesc simultan în același sens doi motocicliști. După 1 oră și 36 minute de la plecare, primul motociclist a parcurs $\frac{7}{10}$ din drum, al doilea $\frac{3}{5}$, iar distanța dintre ei era de 36 km. Se cere: a) distanța dintre cele două orașe; b) distanța parcursă de fiecare motocicletă; c) viteza în km/oră a fiecăruia.

Testul Nr. 24

(școli normale)

I. 1) Se consideră polinomul $f = mX^3 + X^2 + nX + p$, cu $m,n,p \in \mathbf{R}$. Știind că împărțind pe rând polinomul f la $X - 1$ și $X + 2$ se obțin respectiv resturile 4 și -5, iar f este divizibil cu $X + 1$, se cere să se determine coeficienții m, n și p.

2) Să se rezolve ecuația matriceală:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

3) Să se arate că $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$ este o lege de compoziție pe intervalul $G = (-1, 1)$ și că $(G, *)$ este grup comutativ.

Scanned with OKEN Scanner

II. 1) În triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90^\circ)$, AD este înălțime, E, F sunt proiecțiile punctului D pe catetele AB, AC.
Demonstrați relația: $BD \cdot DC = FC \cdot FA + EB \cdot EA$.

2) Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari $AB = 3a$, latura bazei mici $A'B' = a$ și muchia laterală $AA' = 2a$. Să se afle aria laterală și volumul trunchiului, precum și lungimea înălțimii VO a piramidei din care provine trunchiul.

III. 1) Să se scrie numerele 9 și 57 în baza 4 și să se găsească, operând în această bază, suma, diferența, produsul, câtul și restul.
Verificare:

2) Să se afle, prin câte două metode, c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al numerelor 756 și 450.

Testul Nr. 25

(școli normale)

I. Fie polinomul $f = X^4 - X + 1$, $f \in \mathbf{R}[X]$. Se cere:

1) Să se determine toate numerele întregi c, astfel încât $\frac{f(c)}{c-2} \in \mathbf{Z}$.

2) Să se arate că oricare ar fi $a \in \mathbf{R}$, $f(a) > 0$ și că există $b \in \mathbf{R}$ astfel încât $f(b) < 1$.

II. Rezolvați ecuațiile:

1) $4^x + 3 \cdot 2^x = 28$

2) $\log_{\frac{2x-1}{x+1}}(x^2 - 3x + 3) = 0$.

III. Fie $\mathbf{M} = \left\{ A \in M_2(\mathbf{R}) \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R}^* \right\}$.

1) Să se arate că $(M, \cdot)$ grup comutativ.

2) $(M, \cdot)$ este izomorf cu $(\mathbf{R}^*, \cdot)$.

IV. Calculați: $S_9 = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{999\ldots9}_{9\text{-cifre}}$.

Scanned with OKEN Scanner

V. Determinați $n \in \mathbf{N}$, cu proprietatea că 10 divide numărul

$$A = 1980^n + 1981^n + \ldots + 1987^n.$$

VI. Un bazin de forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 24 m, lățimea de 1 dm și înălțimea de 25 dm este faianțat.

1) Câți metri pătrați de faianță sunt necesari?
2) Aflați numărul întreg de plăcuțe de faianță necesare, știind că fiecare are formă de romb $ABCD$ în care ΔABC este obtuzunghic isoscel cu $AB = 15$ cm, iar media proporțională a două unghiuri necongruente a lui este cel mai mic număr natural divizibil cu 5 și cu 12.
3) Câți metri cubi de apă sunt necesar pentru a umple 80% din bazin și până la ce înălțime se ridică apa în acest caz?
4) Un robinet umple bazinul în 12 ore, iar altul în 15 ore. După ce primul curge singur 2,4 ore se închide și se deschide al doilea robinet timp de 1,2 ore. În cât timp ambele robinete vor umple partea rămasă?

Testul Nr. 26

(școli normale)

I. 1) Un părinte și cei doi copii minori au ca vârste puterile diferite ale aceluiași număr prim. Cu un an în urmă, vârsta fiecăruia era reprezentată tot de un număr prim. Ce vârstă are fiecare?
2) La un magazin de pâine, înainte de închidere, erau patru oameni care au cumpărat toată pâinea din magazin. Să se afle câte pâini au fost în total, dacă fiecare persoană a cumpărat jumătate din pâinea care se mai găsea când i-a venit rândul și încă o jumătate de pâine.
3) Fie p un număr prim, $p \geq 5$. Să se arate că oricare ar fi p, numărul $p^2 - 1$ este divizibil cu 24.

II. 1) În triunghiul ABC măsurile unghiurilor $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ sunt direct proporționale cu numerele $3a$, $2a$, respectiv a (a fiind un număr oarecare real și pozitiv). Dacă mediana dusă din A are lungimea m, să se calculeze perimetrul și aria triunghiului ABC.
2) O prismă hexagonală regulată dreaptă este intersectată cu un plan P, care formează cu planul bazei un unghi de 30°. Aria secțiunii fiind de 192 m², să se calculeze lungimea muchiei bazei.

III. 1) Să se determine elementele mulțimii $(A \cap B) \cup C$ dacă

$$A = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} \text{ divizibil cu } 9\}.$$

$$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ este divizor al lui } 1800\}.$$

$$C = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 36x = 0\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Fie $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -nb & a \end{pmatrix} \mid a,b\in \mathbf{Z}, n\in \mathbf{N}\right\}$.

Să se arate că mulțimea A este parte stabilă a mulțimii $\mathbf{M}_2(\mathbf{Z})$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricilor și că $(A, +, \cdot)$ este un inel.

Testul Nr. 27

(școli normale)

I. 1) Fie familia de funcții de gradul al doilea:

$$f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m + 2, \text{ unde } m \in \mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

a) Să se arate că vârfurile parabolelor asociate acestor funcții se găsesc pe dreapta $y = x + 1$.

b) Să se demonstreze că toate parabolele familiei trec printr-un punct fix.

2) Să se demonstreze că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = 2n - 5$ este o progresie aritmetică. Să se găsească primul termen al său și rația.

3) Fie $H = \{a \in \mathbf{N} \mid a \mid 12\}$. Să se arate că H este partea stabilă a lui $\mathbf{N}$ în raport cu legea de compoziție $x * y$ = c.m.m.d.c. $\{x, y\}$ și să se stabilească tabla operației induse.

II. 1) Triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90^\circ)$ are catetele de lungimi:

$AB = 6\sqrt{2}$, $AC = 6$. Fie A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA, AB și G centrul de greutate al triunghiului.

a) Calculați lungimile segmentelor AA', BB', CC'.

b) Arătați că patrulaterul $GA'CB'$ poate fi înscris într-un cerc și determinați lungimea razei cercului.

2) $ABCA'B'C'$ este o prismă triunghiulară regulată, în care M este mijlocul muchiei CC', lungimile laturilor bazelor sunt egale cu a, iar planele ABM și ABC formează un unghi de 45°. Calculați aria totală și volumul prismei.

III. 1) Determinați toate numerele naturale care împărțite la 10 dau câtul egal cu restul.

2) Produsul cu 4 al unui număr este cu 160 mai mare decât $\frac{2}{3}$ din acest număr. Care este numărul?

Scanned with OKEN Scanner

3) Pentru 18 m stambă, 32 m de finet şi 15 m de stofă s-au plătit 170.800 lei. Altă dată, pentru 25 m de stambă, 16 m de finet şi 5 m de stofă s-au plătit 83.400 lei. Un metru de finet costă cu 600 lei mai puțin decât 2 m de stambă. Cât costă 11 m de stambă, 12 m de finet şi 13 m de stofă? (rezolvare aritmetică).

Testul Nr. 28

(şcoli normale)

I. 1) Fie $A=\left\{x\in\mathbf{N}^*\;\middle|\;x=\dfrac{4n}{n+2},n\in\mathbf{N}\right\}$, $B=\{x\in\mathbf{Z}\mid x^2-2x-m=0\}$.

Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel încât $A\cap B\neq\varnothing$.

2) Să se rezolve ecuația: $3\cdot4^x+2\cdot9^x=5\cdot6^x$.

3) Să se rezolve, cu ajutorul regulii lui Cramer, sistemul:

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0\\3x_1-2x_2+2x_3=5\\2x_1+3x_2-2x_3=2\end{cases}.$$

II. 1) În triunghiul ABC $(m(\hat{A})=90^\circ)$ se duce înălțimea AD şi se unește D cu mijloacele E, F ale laturilor AB, AC. Să se arate că patrulaterul $AEDF$ are diagonalele perpendiculare, este inscriptibil şi să se determine centrul cercului circumscris.

2) Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped drept cu baza $ABCD$ romb de latură a şi $m(\widehat{ADC})=60^\circ$, având aria laterală $8a^2$. Să se afle:

a) volumul paralelipipedului;

b) aria triunghiului $A'BD$;

c) $d(A,A'BD)$.

III. 1) Media aritmetică a 80 de numere este 47,5. Două dintre ele sunt 101 şi 33. Aflați media aritmetică a celorlalte.

2) Diferența a două numere este 57. Câtul împărțirii celui mai mare la cel mai mic este 3, iar restul 13. Aflați cele două numere.

3) Un bazin este umplut de 3 robinete. Primul şi al doilea îl umplu în 12 ore, primul şi al treilea în 15 ore, al doilea şi al treilea în 20 ore. În cât timp ar putea umple bazinul fiecare robinet curgând singur? (rezolvare aritmetică).

Scanned with OKEN Scanner

Testul nr. 29

(şcoli normale)

I. 1) Fie polinomul $P(X) = X^3 + 2X^2 + 3X + a$, $a \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine valoarea lui a ştiind că „–1" este rădăcină a lui P.

b) Pentru $a = 2$ să se determine câtul $Q(X)$ al împărţirii lui P prin $X + 1$.

c) În condiţiile de la b) să se arate că $Q(x) > 0$ $(\forall) x \in \mathbf{R}$ şi apoi să se calculeze modulele rădăcinilor ecuaţiei $Q(X) = 0$.

2) Fie $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$.

Calculaţi A^n; $n \in \mathbf{N}^*$.

II. a) Să se determine cel mai mic număr natural n astfel încât

$$\frac{1}{n} < \frac{11 - \sqrt{105}}{2}.$$

b) Să se determine cifrele a, b, c $(a < b < c)$ încât

$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{bac} = 900$.

c) Trei muncitori pot termina o lucrare în opt zile. Câţi muncitori termină o lucrare de două ori şi jumătate mai mare în 6 zile?

III. Baza unei piramide $VABC$ este triunghiul dreptunghic ABC având cateta $AB = 6$ cm, iar ipotenuza $BC = 10$ cm. Determinaţi volumul piramidei dacă $VA = VB = VC = 13$ cm.

Testul Nr. 30

(şcoli normale)

I. 1) Fie $k = \overline{7a1b8c}$ un număr natural divizibil cu 36. Să se calculeze valoarea numerică a expresiei $E = 5 \cdot (a + b + c)^2 - 1$.

2) Considerând $a = 2$ în expresia lui k, să se găsească perechile $(b, c) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ astfel încât să fie divizibil cu 36.

3) Dacă învăţătoarea aşază în bancă câte un băiat şi o fată observă că rămân în picioare 6 fete şi 4 băieţi, iar dacă aşază câte trei copii în bancă, rămân trei bănci libere. Câţi băieţi, câte fete şi câte bănci sunt în clasă?

II. 1) Se dă ecuaţia: $2x^2 + (m - 2)x + 4 = 0$, $m \in \mathbf{R}$. Să se determine m şi să se rezolve ecuaţia ştiind că: $2x_1 + 3x_2 + x_1x_2 = 8 - m$.

Scanned with OKEN Scanner

2) Fie $G = \{x \mid x \in \mathbf{C};\ x^4 - 1 = 0\}$. Să se determine G şi să se arate că G este parte stabilă în $\mathbf{C}$ în raport cu înmulțirea. Să se arate că G este grup abelian în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

III. Fie ΔABC isoscel cu $(AB) \equiv (AC)$ şi cu lungimile laturilor $AB = 5$ cm şi $BC = 8$ cm. Se consideră perpendiculara pe planul triunghiului în punctul B, pe care se ia un punct M astfel încât $BM = \frac{7}{5}$ cm.

a) Să se calculeze distanța de la punctul M la latura AC.
b) Notând cu D piciorul perpendicularei dusă din B pe AC şi $DP \perp BC$, să se calculeze valoarea raportului $\frac{CP}{PB}$.
c) Să se calculeze A_t şi V prismei drepte cu baza ΔABC şi înălțimea BM.

Testul Nr. 31

(profil filologic)

I. Pe $\mathbf{Z}$ se defineşte legea de compoziție "$*$" dată prin:

$$x * y \overset{\text{def}}{=} x + y - 1,\ (\forall) x, y \in \mathbf{Z}.$$

a) Putem calcula expresia $5 * \frac{3}{2}$?
b) Să se arate că legea este comutativă şi asociativă.
c) Să se determine elementul neutru.
d) Să se cerceteze existența elementelor simetrizabile.
e) Să se rezolve ecuațiile: $x * 2 = -4$ şi $x^2 * x = 1$.

II. Fie $H = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ divide pe } 12\}$. Arătați că H este o parte stabilă a lui $\mathbf{N}$ în raport cu fiecare din legile de compoziție:

$$x \perp y \overset{\text{def}}{=} \text{c.m.m.d.c. } \{x, y\},\ x \top y \overset{\text{def}}{=} \text{c.m.m.m.c. } \{x, y\},\ (\forall) x, y \in H.$$

Alcătuiți tablele operațiilor induse.

Scanned with OKEN Scanner

III. Să se calculeze primitivele funcțiilor:

a) $f(x)=\frac{1}{x}\ln x$, $x>0$; b) $f(x) = x^2 \sin x$, $x \in \mathbf{R}$;

c) $f(x) = \cos^2 x$, $x \in \mathbf{R}$; d) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$, $x \in (2, \infty)$.

IV. Să se calculeze aria mulțimii cuprinsă între graficele funcțiilor $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = -x^2 + 2$.

Testul Nr. 32

(profil filologic)

I. Se consideră legea de compoziție "$*$" : $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată prin

$$x * y \overset{\text{def}}{=} xy - x - y + 2.$$

a) Să se calculeze $5 * 3$.
b) Să se arate că legea este comutativă şi asociativă.
c) Să se cerceteze existența elementelor simetrizabile.
d) Să se rezolve ecuațiile: $x*2 = -4$ şi $(x*5) *3 = x*x$.

II. Fie $A \in M_2(\mathbf{Q})$, $A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Arătați că $A^2 + A + I_2 = 0_2$,

$A^3 = I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $0_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

III. Să se calculeze primitivele următoarelor funcții:

a) $f(x) = x^2 \ln x$, $x > 0$;
b) $f(x) = xe^x$, $x \in \mathbf{R}$;
c) $f(x) = \sin^2 x$, $x \in \mathbf{R}$;
d) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbf{R}$.

IV. Să se calculeze aria mulțimii cuprinsă între graficele funcțiilor $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ şi $g(x) = 3 - x$.

Scanned with OKEN Scanner

Testul Nr. 33

(profil filologic)

I. Se notează $M=\left\{A\in \mathbf{M}_2(\mathbf{R}) \,\middle|\, A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\right\}$. Arătați că:

a) $A, B\in M \Rightarrow A\cdot B\in M$.

b) Nu există $U\in M$ astfel încât $U\cdot A=A$, $(\forall)\ A\in M$.

c) Există o infinitate de matrici $V\in M$ astfel încât $A\cdot V=A$, $(\forall)\ A\in M$.

II. Fie $G=(-1,\infty)$ şi legea de compoziție pe G, $x*y=x+y+xy$, $(\forall)\, x, y\in G$.

a) Să se arate că $(G, *)$ este grup comutativ.

b) Calculați $3*4*3$.

c) Rezolvați ecuația $x*x=a$, $a\in \mathbf{R}$.

III. a) Să se calculeze primitivele funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2\cdot e^x$.

b) Să se calculeze $\int_1^e x\cdot \ln x\, dx$.

c) Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=|x^2-3x+2|$; Să se determine aria mărginită de graficul funcției f, axa Ox şi dreptele $x=1$ şi $x=2$.

Testul Nr. 34

(profil filologic)

I. Pe $\mathbf{Z}$ se defineşte legea de compoziție:

$$a\circ b=a+b-a\cdot b,\ (\forall)\, a, b\in \mathbf{Z}.$$

a) Demonstrați că $(\mathbf{Z}, \circ)$ este monoid comutativ.

b) Cercetați dacă $(\mathbf{Z}, \circ)$ este grup comutativ.

c) Determinați $a\in \mathbf{Z}$ astfel încât: $5\le a\circ 2\le 7$.

II. Fie $M=\left\{U_t\in \mathbf{M}_3(\mathbf{R}) \,\middle|\, U_t=\begin{pmatrix} 1 & t & 2t^2+2t \\ 0 & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t\in\mathbf{R}\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Demonstrați că: $U_{t_1+t_2} = U_{t_1} \cdot U_{t_2}$, $(\forall)\ t_1, t_2 \in \mathbf{R}$.

b) Calculați U_0.

c) Arătați că $U_t \cdot U_{-t} = I_3$.

III. Calculați primitivele funcțiilor:

$$f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R},\ f(x) = x^3 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = x^2 \cdot 2^x.$$

IV. Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$ și $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \sin x$.

a) Arătați că graficul lui f este tangenta în $x = 0$ la graficul lui g.

b) Determinați aria cuprinsă între graficele funcțiilor f și g, dreptele $x = 0$ și $x = \frac{\pi}{2}$.

Testul Nr. 35

(profil filologic)

I. În $\mathbf{R}_-^*$ se definește legea de compoziție internă:

$$x * y = \frac{xy}{x+y},\ (\forall) x, y \in \mathbf{R}_-^*.$$

a) Arătați că legea "$*$" este bine definită pe $\mathbf{R}_-^*$.

b) Cercetați asociativitatea legii.

c) Rezolvați: $(x-5) * (x-2) \le (x-1) * (x-6)$.

II. Fără a calcula integrala să se demonstreze:

$$\sqrt{3} - 1 < \frac{24}{\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x} < 1.$$

III. Arătați că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \ge 0 \\ e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$ admite primitive pe $\mathbf{R}$ și determinați aceste primitive.

Scanned with OKEN Scanner

Testul Nr. 36

(profil filologic)

I. 1) Fie $H=\left\{A\in \mathbf{M}_2(\mathbf{R}) \,\middle|\, A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a,b\in\mathbf{R}, a\neq 0\right\}$. Arătați:

a) Dacă $A, B \in H \Rightarrow A \cdot B \in H$.

b) Oricare ar fi $A \in H$, există $X \in H$ astfel încât $A \cdot X = E$, unde

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Fie M mulțimea tuturor matricelor $A \in M_2(\mathbf{Z})$ de forma $A=\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbf{Z}$. Determinați elementele inversabile ale lui M în raport cu înmulțirea matricelor.

II. a) Pe mulțimea $G = (-1, \infty)$ se definește legea de compoziție:

$$G \times G \to G,\ (x, y) \to x * y = xy + x + y.$$

Arătați că $(G, *)$ este grup abelian.

b) Rezolvați ecuația $x * 5 = 12$.

III. Să se calculeze primitivele funcțiilor:

$$f: \mathbf{R}^* \to \mathbf{R},\ f(x)=x^2-2x+\frac{1}{x}-5$$

$$g:\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}, g(x)=x\sqrt{x}+2x\sqrt[3]{x}$$

$$h: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ h(x) = x^2 \cdot e^x.$$

IV. Să se afle aria domeniului plan limitat de graficul funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ și de axa Ox.

Testul Nr. 37

(profil filologic)

I. 1) a) Determinați matricele $A \in M_2(\mathbf{Z})$ cu proprietățile:

$$A^2 = E \text{ și } \det(A) = 1 \text{ unde } E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă $B=\begin{pmatrix} a & 1+a \\ 1-a & -a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbf{Z}$, arătați că $B^2 = E$ şi $\det(B) = -1$.

2) Fie M mulțimea matricelor $A \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$, $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Care sunt elementele simetrizabile ale lui M în raport cu operația indusă?

II. a) Pe mulțimea $G = \mathbf{R} - \{1\}$ se defineşte legea de compoziție:

$G \times G \to G$, $x * y = xy - x - y + 2$.

Arătați că $(G, *)$ este grup.

b) Să se determine simetricul elementelor $2, \frac{1}{2}$ în raport cu legea dată.

III. Să se calculeze primitivele funcțiilor:

$$f:\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R},\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$g:\mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = a\sin x + b\cos x,\ a, b \in \mathbf{R}$$

$$h:\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R},\ h(x) = x^2 \ln x.$$

IV. Să se afle aria domeniului plan limitat de graficul funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ şi axa absciselor.

Testul Nr. 38

(profil filologic)

I. Fie $A_a \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$, $A_n=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1-a \end{pmatrix}$, $(\forall) a \in \mathbf{R}$.

Să se determine numărul real x, astfel încât $A_2 \cdot A_x = A_1 - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

II. Pe mulțimea $\mathbf{Z}$ se defineşte legea de compoziție:

$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $(x, y) \to x * y = xy - x - y + 2$.

Arătați că $(\mathbf{Z}, *)$ nu este grup abelian.

Scanned with OKEN Scanner

III. Să se calculeze primitivele funcțiilor:

1) $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3+2\sqrt{x}-4}{x}$.

2) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{3}{2x^2+8}$.

3) $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2\ln x$.

IV. Să se calculeze aria domeniului cuprins între graficele funcțiilor $f(x)=3x-2$ și $g(x)=x^2$.

Testul Nr. 39

(profil filologic)

I. Se consideră funcțiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3$ și $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=x^4$.

a) Arătați că: $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$ și $g(0)=g'(0)=g''(0)=0$. Precizați dacă punctul $(0,0)$ este un punct de extrem sau un punct de inflexiune al graficelor funcțiilor f și respectiv g.

b) Arătați că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$, iar funcția g este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$.

c) Reprezentați graficele funcțiilor f și g pe același sistem de axe ortogonale xOy.

d) Verificați că aria suprafeței mărginite de graficele funcțiilor f și g și de dreptele $x=0$ și $x=1$ este $\dfrac{1}{20}$ unități de arie.

II. a) Calculați determinantul: $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 2^2 & 3^2 & 4^2\end{vmatrix}$.

b) Arătați că sistemul: $\begin{cases}x+y+z=1\\ 2x+3y+4z=5\\ 2^2x+3^2y+4^2z=5^2\end{cases}$ are soluție unică în $\mathbf{R}$.

Determinați soluția.

Scanned with OKEN Scanner

III. Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale xOy cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 1$ și dreapta de ecuație $y = x$. Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale celor două curbe.

Testul Nr. 40

(profil filologic)

I. 1) Pe mulțimea $\mathbf{Z}$ a numerelor întregi definim legea de compoziție
$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ $\quad (x, y) \to x * y = x + y - 3$ oricare ar fi $x, y \in \mathbf{Z}$.
Arătați că $(\mathbf{Z}, *)$ este grup comutativ.
2) Rezolvați în $\mathbf{Z}$ ecuația $x * (-4) = 3$.

II. 1) Fie matricele $A, X \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 3x-1 & -3 \\ 0 & 2x-3 \end{pmatrix}$.
Să se determine $X \in \mathbf{R}$ știind că $A + X = I_2$, unde I_2 este matricea unitate de ordin 2.
2) Se dă funcția $f : \mathbf{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$, $f(x) = 2x^2 - 3x + I_2$.
Să se calculeze $f(A)$.

III. 1) Să se calculeze primitivele funcțiilor:
a) $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \ln x$;

b) $g : (-\infty, 0) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^3}$.

2) Să se determine aria domeniului limitat de graficul funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ și axa absciselor.

Scanned with OKEN Scanner

REZOLVĂRI ŞI BAREME DE CORECTARE

Testul Nr. 1

I. a) Dacă $A \in \mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_6)$ este inversbilă atunci există $C \in \mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_6)$ a.î. $A \cdot C = C \cdot A = I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A \cdot C) = \det(A) \cdot \det(C) = \hat{1} \Rightarrow \det(A)$ element inversabil în $\mathbf{Z}_6 \Rightarrow \det(A) \in \{\hat{1}, \hat{5}\} = U(\mathbf{Z}_6)$.

Reciproc, dacă

$$\det(A) \in \{\hat{1}, \hat{5}\} = U(\mathbf{Z}_6) \Rightarrow (\exists) A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot A^* . \qquad \textbf{(1p)}$$

b) $\det(B) = \hat{6} - \hat{1} = \hat{5} \in U(\mathbf{Z}_6) \Rightarrow B$ este inversabilă

$$B^T = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix}; \quad B^* = \begin{pmatrix} \hat{3} & -\hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{5} \\ \hat{5} & \hat{2} \end{pmatrix}; \quad (\hat{5})^{-1} = \hat{5}. \qquad \textbf{(1p)}$$

$$B^{-1} = \hat{5} \cdot \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{5} \\ \hat{5} & \hat{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{4} \end{pmatrix}.$$

c) $B \cdot X = A \Rightarrow X = B^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{5} & \hat{0} \\ \hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix}$. **(1p)**

II. a) $f_1(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$; $f_1'(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{e}$.

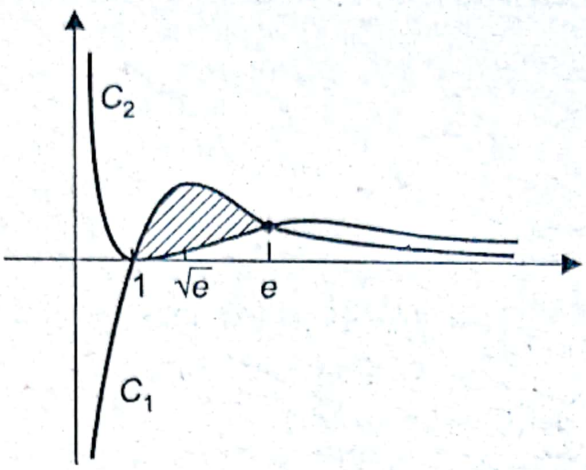
$f_2(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x^2}$; $f_2'(x) = 2\dfrac{\ln x(1 - \ln x)}{x^3} = 0 \Rightarrow x = 1$ sau $x = e$;

$\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\ln x}{x^2} = -\infty$; $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{(\ln x)^2}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x^2} = 0$.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f_1'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

x	0		1		e		$+\infty$
f_2'	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
f_2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	0

Scanned with OKEN Scanner



(2p)

b) $A=\int_1^e\left[\frac{\ln x}{x^2}-\frac{(\ln x)^2}{x^2}\right]dx=\frac{3}{e}-1$ (1p)

c) $I_1=1-\frac{2}{e}$; $I_{n+1}=\int_1^e\frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\cdot(\ln x)^{n+1}\cdot\Big|_1^e+$

$$+(n+1)\cdot\int_1^e\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx=-\frac{1}{e}+(n+1)\cdot I_n\,.$$

Egalitatea se demonstrează prin inducție:

$I_1=1-\frac{2}{e}$ adev.

Presupunem că I_n verifică egalitatea.

$$I_{n+1}=-\frac{1}{e}+(n+1)\cdot I_n\Big|\cdot\frac{1}{(n+1)!}\Rightarrow\frac{1}{(n+1)!}\cdot I_{n+1}=-\frac{1}{e(n+1)!}+1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(n+1)!}\cdot I_{n+1}=1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\right).$$ (1p)

d) $0\le f_n(x)\le 1\Rightarrow 0\le I_n\le\int_1^e\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^e=1-\frac{1}{e}\le 1$

$$0\le\frac{1}{n!}\cdot I_n\le\frac{1}{n!}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}I_n=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e$$ (1p)

III. a) $z'=x'+iy'=\frac{x^2-y^2+2xyi}{i-x-iy}=\frac{x^2-y^2+2xyi}{-x+i(1-y)}=\frac{[x^2-y^2+2xyi][-x-i(1-y)]}{x^2+(1-y)^2}$

$\Rightarrow x' = \text{Re}z' = \dfrac{-x(x^2-y^2)+2xy(1-y)}{x^2+(1-y)^2} = \dfrac{-x\cdot(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2}$. **(0,25p)**

b) $M \in Oy \Leftrightarrow \text{Re}\, z = 0 \Leftrightarrow x(x^2+y^2-2y) = 0 \Rightarrow x = 0$ şi $y \neq 1$ sau $x^2 + y^2 - 2y = 0$. Deci mulţimea E este formată din punctele de pe axa imaginară cu excepţia punctului A reunită cu mulţimea punctelor situate pe cercul de centru A şi rază 1. **(0,5p)**

c) $OM = |z|$; $AM = |z - i|$; $OM' = |z'| = \dfrac{|z|^2}{|i-z|}$; $|z-i| = \dfrac{1}{2}$.

$$z_G = \frac{z+z'+i}{3} = \frac{z+\frac{z^2}{i-z}+i}{3} = \frac{1}{3(z-i)} \Rightarrow OG = \frac{1}{3|z-i|} = \frac{2}{3}$$ **(0,25p)**

Oficiu: (1p)

Testul Nr. 2

I. a) $z = \dfrac{(-2+14i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{50+50i}{9+16} = 2+2i = 2(1+i)$ **(0,25p)**

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow z^{50} = 2^{75}\left(\cos\frac{25\pi}{2} + i\sin\frac{25\pi}{2}\right) =$$

$= 2^{75}\cdot i = w$; **(0,25 + 0,25 = 0,5p)**

$w^2 = -2^{150}$, deci n minim este $n = 2$ **(0,25p)**

b) Fie $a, b \in H \Rightarrow a \cdot x = x \cdot a$ şi $b \cdot x = x \cdot b$, $(\forall)\, x \in G$

$(a\cdot b)\cdot x = a\cdot(b\cdot x) = a(x\cdot b) = (a\cdot x)\cdot b = (x\cdot a)\cdot b = x\cdot(a\cdot b), (\forall)\, x \in G \Rightarrow$

$\Rightarrow ab \in H$. **(0,5p)**

Fie $a \in H$ şi $x^{-1} \in G$ atunci $a \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot a \Rightarrow (a \cdot x^{-1})^{-1} = (x^{-1} \cdot a)^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot x$, $(\forall)\, x \in G \Rightarrow a^{-1} \in H$. **(0,5 p)**

Fie $A \in H$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi considerăm $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in G$.

$$A\cdot X = X\cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} \Rightarrow -b = b \text{ şi } c = -c \Rightarrow b = c = 0;$$

Considerăm:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ şi } A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$AX = XA \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a \\ d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d \\ a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d = a \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = aI_2 .$$

Cum $\det(A) \neq 0 \Rightarrow a \in R^*$, deci $H = \{a \cdot I_2 \mid a \in \mathbf{R}^*\}$. **(0,5 + 0,5 = 1p)**

Evident $(a \cdot I_2) \cdot A = A \cdot (a \cdot I_2)$, $(\forall) A \in \mathbf{G}$.

II. a) $f(\hat{0}) = \hat{2} \neq \hat{0}$; $f(\hat{1}) = \hat{1} \neq \hat{0}$; $f(\hat{2}) = \hat{0} \Rightarrow (x - \hat{2}) \mid f$ **(0,25p)**

$$\begin{array}{r|l} \hat{2}x^4 + \hat{2}x^3 + x^2 + \hat{2} & x - \hat{2} \\ \hline -\hat{2}x^4 + \hat{1}x^3 & \hat{2}x^3 + x + \hat{2} \\ \hline \quad x^2 + \hat{2} & \\ \quad -x^2 + \hat{2}x & \\ \hline \quad \hat{2}x + \hat{2} & \\ \quad -\hat{2}x + \hat{1} & \\ \hline \end{array}$$

$f = (x - \hat{2})(\hat{2}x^3 + x + \hat{2})$ **(0,5p)**

Notăm polinomul $g = \hat{2}x^3 + x + \hat{2}$

Cum $g(\hat{0}) \neq \hat{0}$; $g(\hat{1}) = \hat{2} \neq \hat{0}$; $g(\hat{2}) = \hat{2} \neq \hat{0}$ rezultă că g nu are rădăcini în $\mathbf{Z}_3$ şi grad $g = 3 \Rightarrow g$ este polinom ireductibil în $\mathbf{Z}_3[X]$. Deci

$$f = (x - \hat{2})(\hat{2}x^3 + x + \hat{2})$$

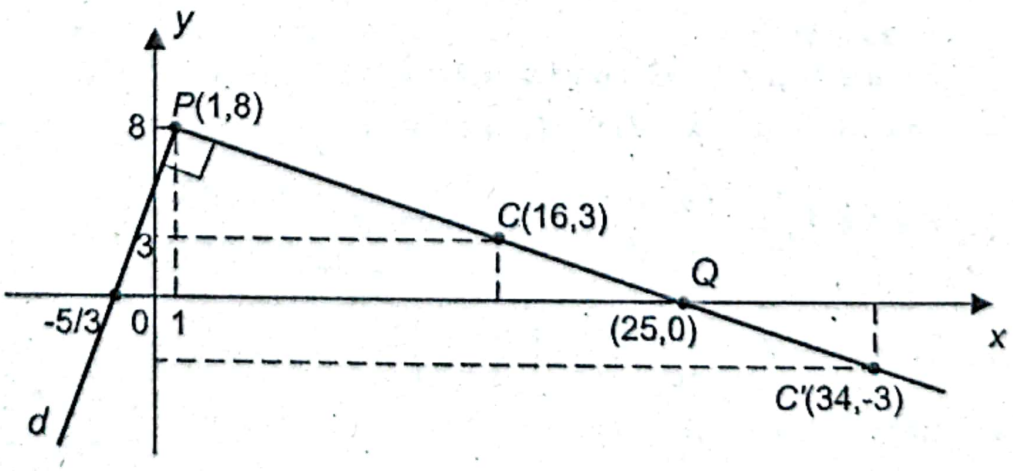
este descompunerea căutată. **(0,25p)**

b) Avem de aşezat cifrele 1, 3, 5, 7, 9 în patru căsuțe. În total se pot forma 5^4 numere. **(0,5p)**

Dacă cifrele sunt distincte atunci se pot forma A_5^4 numere adică

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ de numere. **(0,5p)**

c)



$(d) : 3x - y + 5 = 0$; $m = 3$; $m_{PC} = -\frac{1}{3}$.

Ecuația dreptei PC este $y-8=-\frac{1}{3}(x-1) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{25}{3}$; intersecția cu Ox este $Q(25, 0)$. Centrul C este de coordonate $(16, 3)$

$PC=r_1=\sqrt{15^2+5^2}=\sqrt{250}=5\cdot\sqrt{10}$. **(0,25p)**

Deci primul cerc va fi de ecuație:

$(x-16)^2+(y-3)^2=250$ **(0,25p)**

C' simetricul lui C față de $Q(25, 0) \Rightarrow C'(34, -3)$ **(0,25p)**

Al doilea cerc va fi de ecuație:

$(x-34)^2+(y+3)^2=1210$. **(0,25p)**

III. a) $f_n\left(\frac{2}{n}\right)=e^2-2e-1$. Avem inecuația

$x^2-2x-1>0 \Rightarrow x\in(-\infty, 1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2}, +\infty)$.

Cum $e>1+\sqrt{2} \Rightarrow f_n\left(\frac{2}{n}\right)>0$.

Sau aproximăm numerele prin lipsă și prin adaos. **(1p)**

b) $f_3(x)=e^{3x}-3ex-1$

$f_3'(x)=3e^{3x}-3e=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$ **(0,25p)**

$f_3''(x)=9e^{3x}>0, (\forall)x\in\mathbf{R}$

x	$-\infty$			0		$\frac{1}{3}$			$+\infty$
f_3'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
f_3	$+\infty$	$\searrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$		$+\infty$
						-1 (m)			
f_3''	$+$	$+$	$+$		$+$	$+$	$+$		$+$

(0,25p)

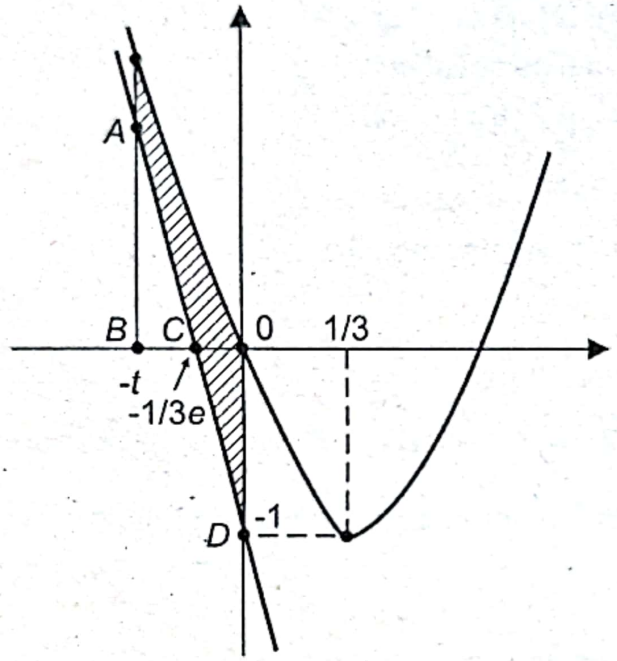
f_3 este continuă pe $\mathbf{R}$ (ca funcție elementară) $\Rightarrow f_3$ nu are asimptote verticale. Din $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_3(x)}{x}=+\infty$ rezultă că spre $+\infty$ graficul funcției nu admite asimptotă oblică. Căutăm $y=m'x+n'$ asimptotă spre $-\infty$

Scanned with OKEN Scanner

$$m'=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{3x}\cdot\frac{1}{x}-3e-\frac{1}{x}\right)=-3e\,.$$

$$n'=\lim_{x\to-\infty}\left(f_3(x)+3ex\right)=-1\Rightarrow y=-3ex-1$$

este asimptotă oblică la graficul lui f_3 spre $-\infty$. **(0,25p)**



(0,25p)

c) $A(t)=\int_{-t}^{0}\left(e^{3x}-3ex-1\right)dx-\sigma[ABC]+\sigma[COD]=$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3t}+3e\frac{t^2}{2}-t-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{3e}\right)(3et-1)+\frac{1}{3e}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3t}+3e\frac{t^2}{2}-\frac{(3et-1)^2-1}{6e}-t\,.$$ **(1p)**

Oficiu: (1p)

Scanned with OKEN Scanner

Testul Nr. 3

I. a)

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

Din tabla operației rezultă că G este parte stabilă în raport cu operația "$\circ$" de compunere a funcțiilor. **(1p)**

b) Compunerea funcțiilor este operație asociativă deci "$\circ$" este asociativă pe G; $e = f_1$ este elementul neutru și $f_1^{-1} = f_1$, $f_2^{-1} = f_2$, $f_3^{-1} = f_3$, $f_4^{-1} = f_4 \Rightarrow$
$\Rightarrow (G, \circ)$ este grup.
Tabla operației fiind simetrică față de diagonala principală rezultă că operația este comutativă. Deci $(G, \circ)$ este grup comutativ. **(1p)**

c) $K = \{e, a, b, c\}$,

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b.
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(1p)

Din studiul celor două table rezultă $G \cong K$.

II. a) Consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$.
f este derivabilă și $f'(x) = e^x - 1$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
f	$\searrow$		0		$\nearrow$

(1p)

$f(x) \geq f(0)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.
Egalitatea are loc numai pentru $x = 0$.

b) Adunând cele trei ecuații obținem
$e^x + e^y + e^z = x + y + z + 3$.
Aplicând egalitatea de la punctul a) avem:

$e^x \geq x + 1$
$e^y \geq y + 1$ și adunându-le obținem: $e^x + e^y + e^z \geq x + y + z + 3$.
$e^z \geq z + 1$

Egalitatea are loc pentru $x = y = z = 0$. **(1p)**

Scanned with OKEN Scanner

c) Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}x$.
f este continuă $\Rightarrow$ f integrabilă.

Fie $\Delta_n=\left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\ldots,\frac{n}{n}=1\right)$, $\|\Delta_n\|=\frac{1}{n}\xrightarrow{n}0$

$$\xi_k=x_k=\frac{k}{n},\ 1\le k\le n\Rightarrow\sigma_\Delta(f,\xi)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{tg}\frac{k}{n}=x_n\xrightarrow{n}\int_0^1\operatorname{tg}x\,dx=\int_0^1\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\ln(\cos x)\Big|_0^1=-\ln(\cos 1).$$

(1p)

III. a) $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{4}{3}$, $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{4}{3}$. **(1p)**

b) $D(0,-1)$. Ecuația medianei AD este **(1p)**

$$\begin{vmatrix}x&y&1\\4&6&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow 7x-4y-4=0.$$

c) $m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-4-2}{2+2}=-\frac{3}{2}\Rightarrow m_{AA'}=-\frac{1}{m_{BC}}=\frac{2}{3}$. **(1p)**

Ecuația înălțimii AA' va fi

$$y-6=\frac{2}{3}(x-4)\Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}.$$

Oficiu: (1p)

Testul Nr. 4

I. 1) Fie $X,Y,Z\in\mathbf{R}^3$, $(X+Y)+Z=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3)+(z_1,z_2,z_3)=$

$=(x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2,\ x_3+y_3+z_3)$.

$X+(Y+Z)=(x_1,x_2,x_3)+(y_1+z_1,\ y_2+z_2,\ y_3+z_3)=$

$=(x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2,x_3+y_3+z_3)$

deci "+" este asociativă în $\mathbf{R}^3$.

$e=(0,0,0)$; $X+e=e+X=X$, $(\forall)X\in\mathbf{R}^3$. Notăm $e=0$.

$(\forall)X\in\mathbf{R}^3$ există $(-X)\in\mathbf{R}^3$ a.î. $X+(-X)=(-X)+X=0$; $-X=(-x_1,-x_2,-x_3)$.

$Y+X=(y_1,y_2,y_3)+(x_1,x_2,x_3)=(y_1+x_1,\ y_2+x_2,\ y_3+x_3)=X+Y$

deci $(\mathbf{R}^3,+)$ este grup abelian. **(1p)**

2) a) $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & \beta & 2\end{vmatrix}=-4+\beta-2+4-2+\beta=2\beta-4$.

Sistemul admite soluție unică dacă $\det(A)\neq 0\Rightarrow \beta\neq 2$ şi $\alpha\in \mathbf{R}$. **(1p)**

b) Dacă $\det(A)=0\Leftrightarrow \beta=2$; $rg(A)=2\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta_c=\begin{vmatrix}1 & 1 & \alpha\\ 1 & -2 & 0\\ 2 & 2 & 0\end{vmatrix}=6\alpha=0\Rightarrow \text{penru } \alpha=0 \text{ sistemul este compatibil.}$$

Notăm $z=\lambda\in\mathbf{R}$.

$$\begin{cases} x+y=-\lambda\\ x-2y=\lambda \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=-\dfrac{\lambda}{3}\\ y=-\dfrac{2\lambda}{3},\ \lambda\in\mathbf{R}\\ z=\lambda \end{cases}. \qquad \textbf{(1,5p)}$$

c) Fie $X=\left(-\frac{\lambda}{3},-\frac{2\lambda}{3},\lambda\right)$ şi $Y=\left(-\frac{t}{3},\frac{-2t}{3},t\right)\in S$

$$X+Y=\left(-\frac{\lambda+t}{3},\frac{-2(\lambda+t)}{3},\lambda+t\right)\in S,$$

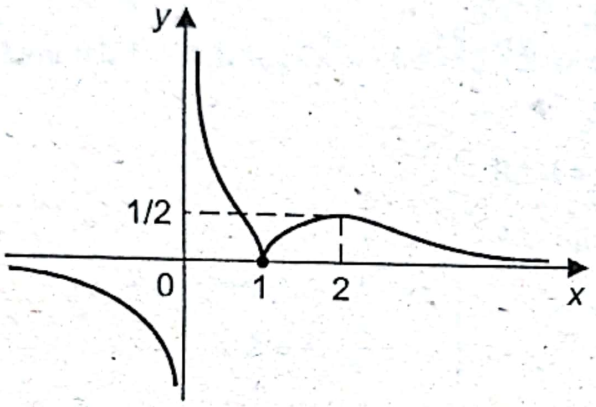
$$-X=\left(\frac{\lambda}{3},\frac{2\lambda}{3},-\lambda\right)\in S\Rightarrow S \text{ subgrup al lui } \mathbf{R}^3. \qquad \textbf{(1p)}$$

II. a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{-x+1}}{x}, & x\in(-\infty,0)\cup(0,1)\\ \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$

$$f'(x)=\frac{x-2}{2x^2\sqrt{1-x}},\qquad x\in(-\infty,0)\cup(0,1)$$

$$f'(x)=\frac{2-x}{2x^2\sqrt{x-1}},\qquad x>1.$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'	$-$	$-$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$-$
f	0	$\searrow$	$\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$ 0



(1,5p)

b) $x = 0$ nu este soluție.

Dacă $x \neq 0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{1-x}}{x} = \lambda$, $x \leq 1$.

Dacă $\lambda \in (-\infty, 0)$ ecuația are o unică soluție în intervalul $(-\infty, 0)$.
Dacă $\lambda = 0 \Rightarrow x = 1$.
Dacă $\lambda \in (0, +\infty)$ ecuația are o unică soluție în intervalul $(0, +\infty)$. **(1,5p)**

c) $|f(x)| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{|1-x|} = |x| \Rightarrow |1-x| = x^2$.

Dacă $x < 1 \Rightarrow 1 - x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \in (-\infty, 1)$.

$x = 1$, nu e soluție.
Dacă $x > 1 \Rightarrow x - 1 = x^2 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$ $\quad x_{1,2} \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$.
Deci există exact 2 puncte. **(1,5p)**

Oficiu: (1p)

Scanned with OKEN Scanner

Testul Nr. 5

I. a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, & x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\\ \dfrac{1-x^2}{x^2+1}, & x\in(-1,1)\end{cases}$ **(0,25p)**

f continuă pe $\mathbf{R}-\{-1,1\}$ ca restricție de funcție elementară; $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=0$;

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=0$ deci $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=0$.

Cum $f(-1)=0$ rezultă f continuă în $x=-1$; **(0,25p)**
Analog se arată că f este continuă în $x=1$. **(0,25p)**
Deci f este continuă pe $\mathbf{R}$. **(0,25p)**

Demonstrația 2

Fie $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, (\forall)\, x\in\mathbf{R}$ şi $b(x)=|x|, (\forall)\, x\in\mathbf{R}$.

h şi g sunt continue şi cum $f=h\circ g$ rezultă f continuă pe $\mathbf{R}$. **(1p)**

b) $f(x)=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x=\pm 1$; $f(0)=1$.
$(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ sunt puncte ale graficului.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1\Rightarrow y=1$ este asimptotă orizontală pentru graficul lui f spre $+\infty$ şi $-\infty$.
f continuă pe $\mathbf{R}$ rezultă că f nu are asimptote verticale. **(0,25p)**

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{4x}{(x^2+1)^2} & \text{pe}(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\\ \dfrac{-4x}{(x^2+1)^2} & \text{pe}(-1,1).\end{cases}$$

$f'_s(-1)=-1, f'_d(-1)=1$; $f'_s(1)=-1, f'_d(1)=1$
f este derivabilă pe $\mathbf{R}-\{-1, 1\}$.
$(-1, 0)$, $(1, 0)$ sunt puncte unghiulare.

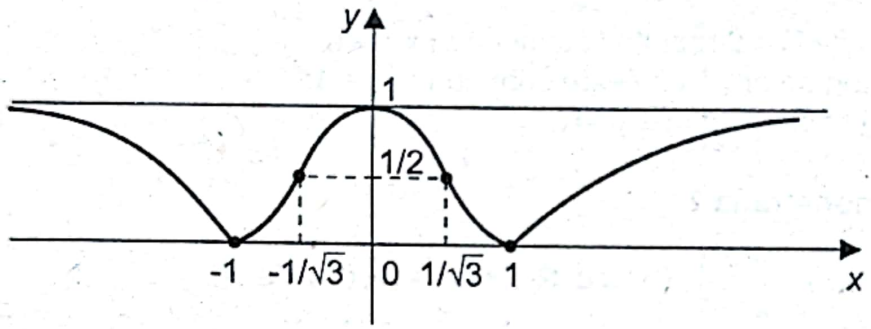
$$f''(x)=\begin{cases}4\dfrac{1-3x^2}{(x^2+1)^3}, & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\\ 4\dfrac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}, & x\in(-1,1)\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

$f''(x)=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (0,25p)

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		$+\infty$
f'	$-\ -\ -$			$+\ +\ +$			0	$-\ -\ -$				$+\ +$	
f	1	$\searrow$	0 (m)	$\nearrow$		$\frac{1}{2}\nearrow$	1 (M)	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0 (m)	$\nearrow$	1
f''	$-\ -\ -$			$+\ +\ 0$		$-\ -\ -$			$0\ +\ +$			$-\ -\ -$	
				(i)					(i)				

(0,50p)



(0,50p)

c) $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 0)$ sunt puncte de extrem.

$\sigma[ABC]=\frac{2\cdot 1}{2}=1$. (0,5p)

II. a) $f(1)=e \Rightarrow A \in G_f$.

$f'(x)=2xe^x+x^2\cdot e^x$ pentru $x>0$.

$f'(1)=2e+e=3e$ (0,5p)

Ecuația tangentei este $y-e=3e(x-1) \Leftrightarrow y=3ex-2e$. (0,5p)

b) f continuă pe $\mathbf{R}^*$ ca restricție de funcții elementare.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=a$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0$.

Pentru $a=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0) \Rightarrow f$ continuă în $x=0$.

Pentru $a=0 \Rightarrow f$ continuă pe $\mathbf{R} \Rightarrow f$ admite primitive.

Pentru $a \in \mathbf{R}^* \Rightarrow x=0$ este punct de discontinuitate de speța I $\Rightarrow f$ nu admite primitive. (0,25p)

$$F(x)=\begin{cases} x\cdot\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg} x+k_1, & x<0 \\ x^2\cdot e^x-2\cdot x\cdot e^x+2\cdot e^x+k_2, & x\geq 0 \end{cases}$$ (0,5p)

Scanned with OKEN Scanner

F derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ şi $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}^*$.

Punem condiţia de continuitate în $x = 0$ pentru F.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x) = k_1$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = 2 + k_2 = F(0)$

$k_1 = k_2 + 2 \Rightarrow k_2 = k_1 - 2$.

$$F(x) = \begin{cases} x\cdot\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + k_1, & x < 0 \\ x^2\cdot e^x - 2x\cdot e^x + 2\cdot e^x + k_1 - 2, & x \geq 0. \end{cases}$$

F este derivabilă în $x = 0$ şi $F'(0) = f(0) = 0$.

$F'(x) = f(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. **(0,25 p)**

c) Pentru $a = 0 \Rightarrow f$ continuă $\Rightarrow f$ admite primitive şi f este integrabilă. **(0,25 p)**

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = F(1) - F(-1) = e - 4 + \ln 2 + \frac{\pi}{2}. \quad \textbf{(0,75p)}$$

III. a) Fie $A, B \in M$; $A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix}$ unde $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$,

$a^2 - 3b^2 = 1$ şi $c^2 - 3d^2 = 1$.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} ac + 3bd & 3(ad + bc) \\ ad + bc & ac + 3bd \end{pmatrix}$$

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 1$ deci $A \cdot B \in M$ **(0,25 p)**

$M \subset \mathbf{M}_2(\mathbf{Q})$ şi "$\cdot$" fiind asociativă pe $\mathbf{M}_2(\mathbf{Q})$ ea este asociativă şi pe M;

pentru $a = 1$, $b = 0 \Rightarrow I_2 \in M$; **(0,25 p)**

$\det A = 1 \Rightarrow A$ inversabilă în $\mathbf{M}_2(\mathbf{Q})$.

$$A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} a & -3b \\ -b & a \end{pmatrix}; \quad \textbf{(0,25 p)}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot A^* = A^* \in M$$

$B \cdot A = A \cdot B$ deci $(M, \cdot)$ grup comutativ. **(0,25 p)**

b) Fie $x, y \in L$.

$x = a + b\sqrt{3}$, $y = c + d\sqrt{3}$, $a,b,c,d \in \mathbf{Q}$ şi $a^2 - 3b^2 = 1$; $c^2 - 3d^2 = 1$.

$x \cdot y = \underbrace{ac + 3bd}_{\in \mathbf{Q}} + \underbrace{(ad + bc)}_{\in \mathbf{Q}}\sqrt{3}$ şi $(ac + 3bd)^2 - 3(ad + bc)^2 =$

$= a^2c^2 + 9b^2d^2 - 3a^2d^2 - 3b^2c^2 = (a^2 - 3b^2)(c^2 - 3d^2) = 1$ deci $x \cdot y \in L$. **(0,25 p)**

Scanned with OKEN Scanner

$L \subset \mathbf{R}$ şi "$\cdot$" este asociativă şi comutativă pe $\mathbf{R}$.
Rezultă că "$\cdot$" are aceleaşi proprietăţi în L.
Pentru $a = 1$ şi $b = 0$ obţinem $1 \in L$. **(0,25p)**

Fie $x = a + b\sqrt{3} \in L$, deci $x \neq 0$

$$x^{-1} = \frac{1}{a+b\sqrt{3}} = \frac{a-b\sqrt{3}}{a^2-3b^2} = a - b\sqrt{3} \in L \qquad \textbf{(0,5p)}$$

Deci $(L, \cdot)$ este grup comutativ.

c) Definim funcţia $f : L \to M$ prin

$$f(a+b\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(0,25p)}$$

Dacă $f(a+b\sqrt{3}) = f(c+d\sqrt{3}) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix} \Rightarrow a = c$ şi $b = d \Rightarrow$

$\Rightarrow a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3} \Rightarrow f$ este funcţie injectivă. **(0,25p)**

Dacă $A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \in M$, $(\exists)\ x = a + b\sqrt{3} \in L$ astfel încât $f(a+b\sqrt{3}) = A$

$\Rightarrow f$ este funcţie surjectivă. **(0,25p)**

Deci f este bijectivă.

$$f(x \cdot y) = f((a+b\sqrt{3})\cdot(c+d\sqrt{3})) = f(ac+3bd+(ad+bc)\sqrt{3}) =$$

$$= \begin{pmatrix} ac+3db & 3(ad+bc) \\ ad+bc & ac+3bd \end{pmatrix} = A \cdot B = f(x) \cdot f(y)$$ adică f este morfism de grup.

Deci f este izomorfism. **(0,25p)**

Oficiu: (1p)

Testul Nr. 6

I. Notăm cu A matricea sistemului.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)\cdot(\gamma-\alpha)\cdot(\gamma-\beta) \qquad \textbf{(0,5p)}$$

Dacă α, β, γ sunt diferite 2 câte 2 atunci $\det(A) \neq 0$ şi $\text{rang}(A) = \text{rang}(\overline{A}) = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat iar soluţia se determină cu ajutorul formulelor lui Cramer.

Scanned with OKEN Scanner

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \beta & \gamma \\ \lambda^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} = \frac{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \lambda & \gamma \\ \alpha^2 & \lambda^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} = \frac{(\lambda-\alpha)(\gamma-\lambda)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \lambda \\ \alpha^2 & \beta^2 & \lambda^2 \end{vmatrix}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\lambda)(\gamma-\beta)} = \frac{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}. \qquad \textbf{(1,5p)}$$

Dacă $\alpha = \beta \neq \gamma$, cum $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = \gamma - \beta \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$

$$\Delta_{car} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \beta & \gamma & \lambda \\ \beta^2 & \gamma^2 & \lambda^2 \end{vmatrix} = (\gamma-\beta)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)$$

Dacă $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{\beta, \gamma\}$ atunci $\Delta_{car} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(\overline{A}) = 3$ deci sistemul este incompatibil.

Dacă $\lambda = \beta \Rightarrow \Delta_{car} = 0 \Rightarrow \text{rang}(\overline{A}) = 2 = \text{rang}(A)$.
Notăm $x_1 = w \in \mathbf{R}$ şi rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 - w \\ \beta x_2 + \gamma x_3 = \beta - \beta w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = w \\ x_2 = 1 - w \\ x_3 = 0 \end{cases}, w \in \mathbf{R}.$$

Dacă $\lambda = \gamma$; $x_1 = t \in \mathbf{R}$.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 - t \quad |-\gamma \\ \beta x_2 + \gamma x_3 = \gamma - \beta t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = 1 \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Analog se rezolvă sistemul în cazurile:
$\alpha = \gamma \neq \beta$ şi $\beta = \gamma \neq \alpha$.

Dacă $\alpha = \beta = \gamma \Rightarrow \text{rang}(A) = 1$ şi $\lambda \neq \alpha \Rightarrow \text{rang}(\overline{A}) = 2$ deci sistemul este incompatibil.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\alpha = \beta = \gamma = \lambda$, atunci $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 1$.
Notăm: $x_2 = v$, $x_3 = w$ şi obţinem soluţiile

$$\begin{cases} x_1 = 1 - v - w \\ x_2 = v \\ x_3 = w \end{cases} \quad \text{unde } v, w \in \mathbf{R}. \qquad \textbf{(0,5p)}$$

II. a) $f(x) \geq 2$, $(\forall)\, x > -1$, $f(x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \lambda \Leftrightarrow x = \lambda^2 - 1 > -1$.
Deci minimul se atinge şi este independent de λ. **(0,5p)**

b) f este indefinit derivabilă;

$$f'(x) = \frac{1}{2\lambda}(x+1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{\lambda}{2}\cdot(x+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{5}{2}}\left[3\lambda - \frac{1}{\lambda}\cdot(x+1)\right];$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 3\lambda^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = 3\lambda^2 - 1 > -1.$$

x	-1			$3\lambda^2-1$			$+\infty$
f''	|	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f	|		$\cup$		(i)	$\cap$		

(1p)

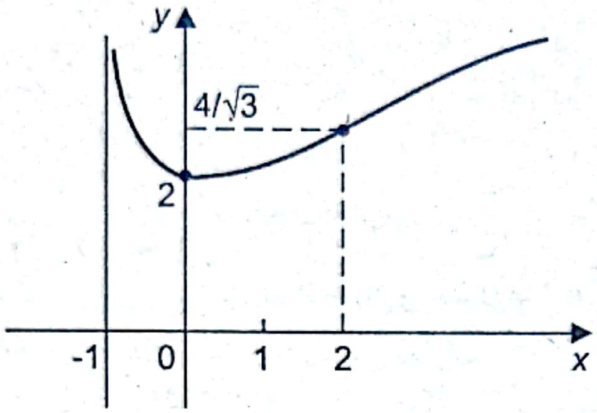
c) $\lim\limits_{x \searrow -1} f(x) = +\infty \Rightarrow x = -1$ este asimptotă verticală.
Graficul lui f nu admite asimptotă oblică spre $+\infty$.

$$f'(x) = \frac{x}{2\cdot(x+1)^{3/2}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f''(x) = \frac{2-x}{4}\cdot(x+1)^{-\frac{5}{2}};\ f''(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \qquad \textbf{(0,5p)}$$

x	-1		0		2		$+\infty$
f'	|	$-$ $-$ $-$	0	$+$ $+$	0	$+$ $+$ $+$	
f	|	$+\infty \searrow \searrow$	2 (m)	$\nearrow \nearrow$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	$\nearrow \nearrow +\infty$	
f''	|	$+$ $+$ $+$ $+$	$+$	0	$-$ $-$ $-$		
			$\cup$		(i) $\cap$		

(0,5p)



(0,5p)

III. a) Definim funcția $f:\mathbf{R}_+^*\to\mathbf{R}$ prin $f(x)=\ln x$; **(0,5p)**

f este bijectivă; **(0,5p)**

$f(x\cdot y)=\ln(x\cdot y)=\ln x+\ln y=f(x)+f(y)$, $(\forall)\, x, y\in\mathbf{R}_+^*$, deci f este morfism de grup; f bijectivă $\Rightarrow$ f izomorfism.

b) Prespunem că există $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}_+^*$ un izomorfism $\Rightarrow$ f bijecție și

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y).$$

$2\in\mathbf{Q}$, $(\exists)!\, q\in\mathbf{Q}$ și $f(q)=2$

$$f(q)=f\left(\frac{q}{2}+\frac{q}{2}\right)=f\left(\frac{q}{2}\right)\cdot f\left(\frac{q}{2}\right)=2\Rightarrow f\left(\frac{q}{2}\right)\notin\mathbf{Q}\,!$$ **(1p)**

c) $\cos\alpha=x-2$ $\qquad$ $\sin\alpha=-y-1$

Eliminând pe α între cele două relații se determină locul geometric.

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ deci: $(x-2)^2+(y+1)^2=1$ adică locul geometric este un cerc cu centrul în punctul $C(2,-1)$ și rază $r=1$. **(1,5p)**

Oficiu: (1p)

Testul Nr. 7

I. 1) $\det A=\begin{vmatrix}1 & -m & 1\\ 1 & 1 & 1\\ m & 1 & -m^2\end{vmatrix}=-m^2+1-m^2-m-m^3-1=$

$$=-m^3-2m^2-m=-m(m+1)^2$$

Dacă $m\in\mathbf{R}-\{-1,0\}\Rightarrow\det(A)\neq 0\Rightarrow \operatorname{rg}(A)=3=\operatorname{rg}(\bar{A})\Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat și soluția se determină cu ajutorul formulelor lui Cramer.

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{m(m+1)} \\ y=-1 \\ z=\dfrac{-2}{m(m+1)} \end{cases}.$$

Dacă $m=0$: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow \operatorname{rg}(A)=2$ şi

$$\Delta_c=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow \operatorname{rg}(\overline{A})=3$$ deci sistemul este incompatibil.

Dacă $m=-1\Rightarrow \Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow \operatorname{rg}(A)=2$ şi

$$\Delta_c=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & +1\end{vmatrix}=0\Rightarrow \operatorname{rg}(\overline{A})=\operatorname{rg}(A)=2\Rightarrow$$ sistemul este compatibil

nedeterminat ($r=2<n=3$).

Notăm $z=\lambda\in\mathbf{R}$; $\begin{cases} x+y=-1-\lambda \\ -x+y=1+\lambda \end{cases}\Rightarrow y=0, x=-1-\lambda$

$$\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases},\ \lambda\in\mathbf{R}.$$ **(2,5p)**

2) a) Fie $A, B\in G$;

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ -a & 1 & -\dfrac{a^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & b\\ -b & 1 & -\dfrac{b^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & a+b\\ -(a+b) & 1 & -\dfrac{(a+b)^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in G$$

deci $A_a\cdot A_b=A_{a+b}$.

b) $(A_a\cdot A_b)\cdot A_c=A_{a+b}\cdot A_c=A_{a+b+c}$

$A_a\cdot(A_b\cdot A_c)=A_a\cdot A_{b+c}=A_{a+b+c}$ deci $\cdot$ este este asociativă.

$A_a\cdot A_0=A_0\cdot A_a=A_a\Rightarrow e=A_0$

$A_a\cdot A_{-a}=A_{-a}\cdot A_a=A_0$

$A_b\cdot A_a=A_{b+a}=A_{a+b}=A_a\cdot A_b\Rightarrow (G,\cdot)$ grup comutativ.

Fie $f:\mathbf{R}\to G$, $f(a)=A_a$, f izomorfism de grupuri. **(1p)**

Scanned with OKEN Scanner

II. Presupunem că ecuația are toate rădăcinile reale $\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \geq 0$.

Dar $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2\sum\limits_{1\leq i<j\leq 4} x_i\cdot x_j=$

$=(2a+1)^2-4(a+1)^2=-4a-3<0$!

Deci ecuația are cel mult 2 rădăcini reale. **(1,5p)**

III. 1) a) $f'(x)=(2x+4)\cdot e^x+(x^2+4x+m)\cdot e^x=e^x(x^2+6x+m+4)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+6x+m+4=0\Rightarrow \Delta>0\Leftrightarrow 36-4(m+4)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9-m-4>0\Leftrightarrow m<5.$ **(1p)**

b) $f(x)=(x+2)^2\cdot e^x$

$f(x)=0\Rightarrow x=-2$

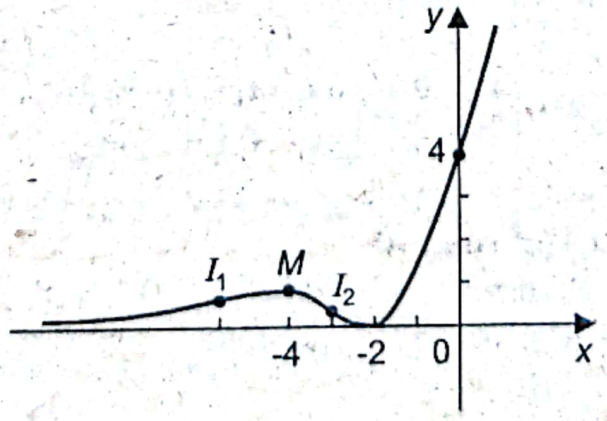
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

$f'(x)=e^x\cdot(x^2+6x+8);\qquad f'(x)=0\Rightarrow x_1=-2,\ x_2=-4$

$f''(x)=e^x(x^2+8x+14);\qquad f''(x)=0\Rightarrow x_1'=-4-\sqrt{2},$

$x_2'=-4+\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$-4-\sqrt{2}$		-4		$-4+\sqrt{2}$		-2		0		$+\infty$
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
f	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\frac{4}{e^4}$ (M)	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	0 (m)	$\nearrow$	4		$+\infty$
f''	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$		
		$\cup$			$\cap$					$\cup$			



(1 p)

Scanned with OKEN Scanner

c) $A=\int_2^3[(x+2)^2\cdot e^x-e^x]dx=\int_2^3(x^2+4x+3)e^x dx=F(3)-F(2)$ unde $F(x)=e^x(x^2+2x+1)$ deci $A=16e^3-9\cdot e^2$. (1p)

2) $f_2(x)=\int_1^x dt=x-1$

$$f_3(x)=\int_1^x(t-1)dt=\frac{(t-1)^2}{2}\Big|_1^x=\frac{(x-1)^2}{2}$$

$$f_4(x)=\int_1^x\frac{(t-1)^2}{2}dt=\frac{(t-1)^3}{3!}\Big|_1^x=\frac{(x-1)^3}{3!}$$

Presupunem că $f_n(x)=\frac{(x-1)^{n-1}}{(n-1)!}$

$$f_{n+1}(x)=\int_1^x\frac{(t-1)^{n-1}}{(n-1)!}dt=\frac{(t-1)^n}{n!}\Big|_1^x=\frac{(x-1)^n}{n!}$$

deci $f_n(x)=\frac{(x-1)^{n-1}}{(n-1)!}$, $(\forall)\, n\geq 1$.

$a_n=f_{n+1}(2)=\frac{1}{n!}\xrightarrow[n]{}0$. (1p)

Oficiu: (1p)

Testul Nr. 8

I. 1) a) $A^2=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ \beta & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ \beta & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta & \alpha\\ \alpha\cdot\beta & \beta\end{pmatrix}$

$$x_0\cdot I+x_1\cdot A+x_2A^2=\begin{pmatrix}x_0 & 0\\ 0 & x_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha x_1 & x_1\\ \beta x_1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(\alpha^2+\beta)x_2 & \alpha x_2\\ \alpha\beta x_2 & \beta x_2\end{pmatrix}=$$

$$=O_2\Rightarrow\begin{cases}x_0+\alpha x_1+(\alpha^2+\beta)x_2=0\\ x_1+\alpha\cdot x_2=0\\ \beta x_1+\alpha\cdot\beta\cdot x_2=0\\ x_0+\beta x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\alpha x_2\\ x_0=-\beta x_2\end{cases}$$ (1p)

b) $(A-I)^2=\begin{pmatrix}\alpha-1 & 1\\ \beta & -1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}(\alpha-1)^2+\beta & \alpha-2\\ \alpha\cdot\beta-2\beta & \beta+1\end{pmatrix}=O_2\Rightarrow\alpha=2$ şi $\beta=-1$. (1p)

c) $A^2 = I \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta = 1 \\ \alpha = 0 \\ \alpha \cdot \beta = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0$ şi $\beta = 1$. **(1p)**

2) a) $\mathbf{Z}_3 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\} \Rightarrow \text{card } T = 9$ **(0,5p)**

b) $x^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$, $(\forall) x \in \mathbf{Z}_3$

$$x^2 + y^2 = \hat{1} \Rightarrow G = \left\{ e = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ -\hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix} \right\}.$$

(0,5p)

c)

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

înmulțirea matricelor este asociativă iar e este elementul neutru;
$e^{-1} = e$, $a^{-1} = c$, $b^{-1} = b$, $c^{-1} = a$ deci $(G, \cdot)$ este grup comutativ. **(1p)**

d) $G = \{e, a, a^2, a^3\}$

$\mathbf{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$

$f: G \to \mathbf{Z}_4$, $f(a^k) = \hat{k}$, $0 \le k \le 3$ este un izomorfism de grupuri. **(1p)**

II. a) f continuă pe intervalul $[0, 1] \Rightarrow f$ are proprietatea lui Darboux deci $f([0, 1]) = I$ interval. Cum $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow I \subset [0, 1]$. Deci f nu este surjectivă.

(0,5p)

b) Dacă f ar fi strict crescătoare, din $0 < \frac{1}{2} \Rightarrow f(0) < f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, contradicție cu $f(0) \in [0, 1] \cup [2, 3]$ deci f nu este strict crescătoare. **(0,5p)**

c) Dacă f este injectivă $\Rightarrow f$ strict monotonă (f are proprietatea Darboux).
Am arătat că f nu este strict crescătoare.

Dacă f ar fi strict descrescătoare din $\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 > f(1)$ contradicție.

Deci f nu este injectivă. **(0,5p)**

Scanned with OKEN Scanner

III. $y'(x) = n\sin^{n-1}x\cdot\cos x$

$y''(x) = n(n-1)\cdot\sin^{n-2}x\cdot\cos^2 x - n\sin^n x = n\sin^{n-2}x[(n-1)\cos^2 x - \sin^2 x] =$

$= n\sin^{n-2}x[n\cos^2 x - 1]$

$$y''(x_n) = 0 \Rightarrow \cos^2 x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \sin^2 x_n = 1-\frac{1}{n} \Rightarrow \sin x_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$x_n = \arccos\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n]{} \frac{\pi}{2}$$

$$y_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \xrightarrow[n]{} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$ **(1,5p)**

Oficiu: (1p)

Testul Nr. 9

I. a) Fie $A, B \in G$; $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$ **(0,5 p)**

b) Asociativitatea se poate demonstra în două moduri.

1) Fie $A, B, C \in G$; $(A\cdot B)\cdot C = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & a+b+c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A\cdot(B\cdot C) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & b+c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b+c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

deci $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$, $(\forall)\, A, B, C \in G$.

2) Înmulţirea matricelor este asociativă pe $\mathbf{M}_2(\mathbf{R}) \Rightarrow$ înmulţirea este asociativă pe $G \subset \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$.

Pentru $a = 0 \Rightarrow I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$

$\det(A) = 1 \neq 0$; $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$; $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$ deoarece

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\cdot A^*$; deci $(\forall)\, A \in G$, $(\exists) A^{-1} \in G$ a.î. $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_2$

Scanned with OKEN Scanner

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A \cdot B$ deci $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

(1p)

c) $A \cdot X \cdot B = C$; A, B sunt inversabile deci $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a+c-b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(0,5p)**

d) Dacă $f(a) = f(b) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b$ deci f este injectivă;

Fie $A \in G$, $(\exists) a \in \mathbf{R}$ a.î. $f(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$ deci f este surjectivă.

(0,25p)

$f(a+b) = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A \cdot B = f(a) \cdot f(b)$ deci f este morfism de grupuri. **(0,25p)**

Deci f este izomorfism de grupuri.

II. a) $f'(x) = \dfrac{(2x+a)(x+c) - x^2 - ax - b}{(x+c)^2} = \dfrac{x^2 + 2xc + ac - b}{(x+c)^2} = 0$ are 2 soluții reale deoarece $\Delta = c^2 + b - ac > 0$ **(1p)**

b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1+a+b}{1+c} = \pm\infty$ deci $c = -1$.

$m = 1 = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 - x}$

$n = 2 = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 + ax + b}{x-1} - x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x(a+1)+b}{x+1} = a+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 1$

$f(2) = 6 \Rightarrow \dfrac{4+2+b}{1} = 6 \Rightarrow b = 0$

Pentru aceste valori, $y = x + 2$ este asimptotă şi spre $-\infty$. **(1p)**

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x-1}$; $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $x = -1$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

$f(1+\sqrt{2})=3+2\sqrt{2}$; $f(1-\sqrt{2})=3-2\sqrt{2}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

x	$-\infty$		-1	$1-\sqrt{2}$		0		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$ $3-2\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\left\|\begin{matrix}+\infty\\-\infty\end{matrix}\right.$	$\searrow$	$3+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

(1p)

$y-f(0)=f'(0)\cdot x \Rightarrow y=-x$ este ecuația tangentei la graficul lui f în $x=0$ **(0,5p)**

d) $A=\int_{-1}^{0}\frac{x^2+x}{x-1}dx=\int_{-1}^{0}\left(x+2+\frac{2}{x-1}\right)dx=\frac{3}{2}-\ln 4$ **(1p)**

III. a) $A(1,2)$

$m_{BB'}=\frac{2}{3}\Rightarrow m_{AC}=-\frac{3}{2}$; (AC); $y-2=-\frac{3}{2}(x-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$, $m_{CC'}=-1$; $m_{AB}=1\Rightarrow (AB)$; $y=x+1$

$\begin{cases} y=x+1 \\ 2x-3y+1=0 \end{cases}\Rightarrow x=-2, y=-1\Rightarrow B(-2,-1)$

$\begin{cases} y=-x \\ y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-7 \end{cases}\Rightarrow C(7,-7)$

(BC); $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 7 & -7 & 1 \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 2x+3y+7=0$ **(1p)**

b) Ecuația cercului circumscris este:

$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -1 & 1 \\ 98 & 7 & -7 & 1 \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 45(x^2+y^2)-279x+279y-504=0$. **(1p)**

Oficiu: (1p)

Scanned with OKEN Scanner

Testul Nr. 10

I. a) Fie $A, B \in M$;

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c & d \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+c & d+ac+b \\ 0 & 1 & a+c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M \quad \textbf{(0,25p)}$$

Cum $M \subset \mathbf{M}_3(\mathbf{R})$, rezultă că înmulțirea este asociativă pe M (se poate demonstra şi prin calcul direct). **(0,25p)**
Pentru $a = b = 0$ rezultă $I_3 \in M$. **(0,25p)**
Fie $A \in M$; $\det(A) = 1 \neq 0$ rezultă că A este inversabilă.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & a & 1 \end{pmatrix}; \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2-b \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* = A^* \in M \quad \textbf{(0,25p)}$$

Deci $(M, \cdot)$ este grup.

b) Fie $A, B \in H$; $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$;

$\det A = 1 \Rightarrow A$ inversabilă şi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ deci $(H, \cdot)$ este subgrup al grupului $(M, \cdot)$. **(0,25 + 0,25 = 0,5p)**

Definim funcția $f : \mathbf{R} \to H$ prin $f(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(\forall)\, a \in \mathbf{R}$.

Dacă $f(a) = f(b) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b$ deci f este funcție injectivă. Fie $A \in H$, $(\exists) a \in \mathbf{R}$ a.î. $f(a) = A$ deci f este surjectivă; rezultă f bijectivă.

Scanned with OKEN Scanner

$$f(a+b)=\begin{pmatrix}1 & 0 & a+b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A\cdot B=f(a)\cdot f(b),\ (\forall)\ a,\ b\in \mathbf{R}$$

rezultă că f este morfism. Deci f este izomorfism. **(0,5p)**

c) Notăm $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Ecuația dată se scrie: $X^n \cdot A = B$. Cum $\det A = 1 \Rightarrow A$ este inversabilă.

$X^n = B \cdot A^{-1}$ (am înmulțit la dreapta cu A^{-1}) $\Rightarrow X^n=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Fie $X=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $X^n=\begin{pmatrix}1 & x_n & y_n\\ 0 & 1 & x_n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ unde $x_1 = a$, $y_1 = b$.

$$X^{n+1}=X^n\cdot X=\begin{pmatrix}1 & x_n & y_n\\ 0 & 1 & x_n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x_n+a & b+ax_n+y_n\\ 0 & 1 & x_n+a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$=\begin{pmatrix}1 & x_{n+1} & y_{n+1}\\ 0 & 1 & x_{n+1}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Identificând obținem relațiile de recurență următoare:

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+a,\ (\forall)n\geq 1, & x_1=a\\ y_{n+1}=a\cdot x_n+y_n+b,\ (\forall)n\geq 1, & y_1=b\end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1}-x_n&=a\\ x_2-x_1&=a\\ x_3-x_2&=a\\ &\vdots\\ x_n-x_{n-1}&=a\end{aligned}$$

$$x_n-a=(n-1)\cdot a$$

$$\Rightarrow x_n=na,\ (\forall)\ n\geq 1$$

Scanned with OKEN Scanner

$$y_{n+1}-y_n=a^2\cdot n+b$$
$$y_2-y_1=a^2+b$$
$$y_3-y_2=2a^2+b$$
$$y_4-y_3=3a^2+b$$
$$\vdots$$
$$y_n-y_{n-1}=(n-1)a^2+b$$

$$y_n-b=a^2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)b$$

$$\Rightarrow y_n=\frac{a^2\cdot n(n-1)}{2}+n\cdot b\,.$$

Revenind la ecuația dată obținem: $n\cdot a=1\Rightarrow a=\frac{1}{n}$ și

$$b\cdot n+\frac{(n-1)}{2n}=0\Rightarrow b=\frac{1-n}{2n^2}$$ **(0,75p)**

II. a) f este derivabilă și $f'(x)=\frac{x^3-3x+a}{(x^2+1)^{3/2}}=0$ **(0,25p)**

Notăm $g(x)=x^3-3x+a$, $f'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=0$.

$g'(x)=3x^2-3=0\Rightarrow x=\pm 1$;

x	$-\infty$			-1			1			$+\infty$
g'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
g	$-\infty$	↗		$a+2$ $(+)$	↘		$a-2$ $(-)$	↗		$+\infty$

(0,25p)

Conform șirului lui Rolle rezultă că g are trei rădăcini reale. Cum f' își schimbă semnul de o parte și de alta a acestor rădăcini rezultă că f are 3 puncte de extrem local. **(0,25p)**

b) f este continuă pe $\mathbf{R}\Rightarrow f$ nu are asimptote verticale

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty;\ f'(x)=\frac{(x-1)^2\cdot(x+2)}{(x^2+1)^{3/2}}$$ **(0,25p)**

x	$-\infty$			-2			1			$+\infty$
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
f	$+\infty$	↘	↘	$\sqrt{5}$ (m)	↗		$\frac{8}{\sqrt{2}}$	↗		$+\infty$

(0,25p)

Căutăm asimptotele oblice; Fie $y = mx + n$ spre $+\infty$.

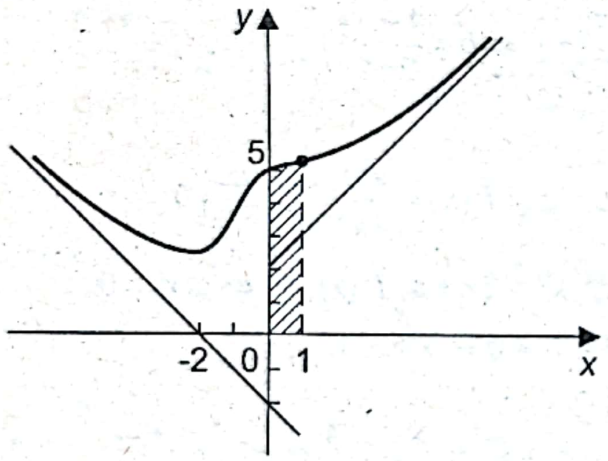
$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1;\ n = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+2x+5) - x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3+13x^2+20x+25}{[(x^2+2x+5)+x\sqrt{x^2+1}]\cdot\sqrt{x^2+1}} = 2 \Rightarrow y = x+2 \text{ este asimptota}$$

oblică spre $+\infty$.

Fie $y = m'x + n'$ spre $-\infty$; $m' = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{-x^2\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$

$n' = -2$; $y = -x - 2$ este asimptota oblică spre $-\infty$. **(0,25p)**



(0,25p)

c) $A = \int_0^1 \frac{x^2+2x+5}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_0^1 +$

$+ 2\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 + 4\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_0^1 =$

$= \frac{9}{2}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 5 - 2$ **(1p)**

III. a) $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon_{1,2}$ **(1p)**

b) $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1^{11} + \varepsilon_1^{10} + \varepsilon_1^5 + \varepsilon_1^4 + 2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 + 2 =$

$= 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 + 1) = 0$ deoarece $\varepsilon_1^3 = \varepsilon_2^3 = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Analog $f(\varepsilon_2)=0 \Rightarrow (X-\varepsilon_1) \mid f$ şi $(X-\varepsilon_2) \mid f$.
Cum $(X-\varepsilon_1, X-\varepsilon_2)=1$ rezultă $(X-\varepsilon_1)(X-\varepsilon_2) \mid f \Leftrightarrow (X^2+X+1) \mid f$ **(1p)**

c) $f=(x^2-1)\cdot Q(x)+ax+b$; $r(x)=ax+b$.
$f(1)=a+b$
$f(-1)=-a+b$

Se obţine sistemul: $\begin{cases} a+b=6 \\ -a+b=2 \end{cases}$, ce are soluţiile: $a=2$, $b=4$.

Deci $r(x)=2x+4$. **(1p)**

Obs. Se poate determina $r(x)$ şi prin împărţire.

Oficiu: (1p)

Testul Nr. 11

I. $\det(A)=\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix}=a^3-7a+6$.

1) $\det(A)=0 \Leftrightarrow a \in \{-3, 1, 2\}$.
Pentru $a \in \mathbf{R}-\{-3, 1, 2\}$, $\det A \neq 0$ deci sistemul dat are soluţie unică, soluţia banală ($x=y=z=0$). **(1p)**

2) Dacă $a=1$; $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A)=2=\operatorname{rg}(\overline{A}) \Rightarrow$ sistemul este compatibil nedeterminat.

Notăm $x=\lambda$; $\begin{cases} y+2z=-\lambda \\ y+z=-\lambda \end{cases} \Rightarrow y=-\lambda,\ z=0$.

Deci $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda \\ z=0 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. **(1p)**

II. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax^4}{x(cx+b)^3}=1 \Rightarrow a=c^3$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{c^3x^4}{c^3x^3+3c^2bx^2+3b^2cx+b^3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3c^2bx^3-3b^2cx^2-b^3x}{c^3x^3+3c^2bx^2+3b^2cx+b^3}=$$

$$=-3\frac{b}{c}=-3\Rightarrow b=c\,.$$ **(1p)**

2) $f:\mathbf{R}-\{-1\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^4}{(x+1)^3}$.

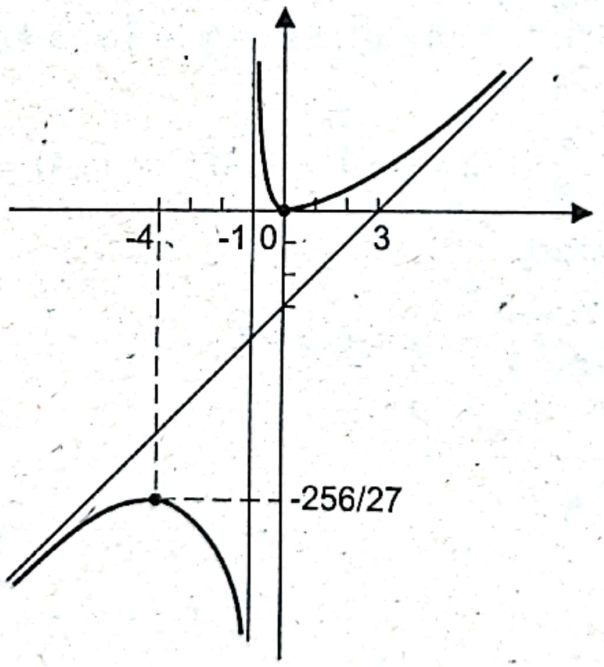
$f(0)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=+\infty \Rightarrow x=-1$ asimptotă verticală

$f'(x)=\dfrac{x^3(x+4)}{(x+1)^4}=0\Rightarrow x_1=-4,\ x_2=0$

x	$-\infty$		-4		-1		0		$+\infty$
f'	$+$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$+$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{256}{27}$ (M)	$\searrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\searrow$	0 (m)	$\nearrow$	$+\infty$

$y=x-3$ asimptotă oblică spre $-\infty$ şi spre $+\infty$



(1,5p)

3) $A=\int_1^2 \dfrac{x^4}{(x+1)^3}\,dx=\int_2^3 \dfrac{(y-1)^4}{y^3}\,dy=\dfrac{-151}{72}+6\ln\dfrac{3}{2}$. (0,5p)

4) $f(1)=\frac{1}{8}$; $f'(1)=\frac{5}{16}\Rightarrow y-\frac{1}{8}=\frac{5}{16}(x-1)$ **(1p)**

5) Dacă $m\in\left(-\infty,-\frac{256}{27}\right)$ ecuația are 2 soluții.

Dacă $m=-\frac{256}{27}$ ecuația are o unică soluție $x=-4$.

Dacă $m\in\left(-\frac{256}{27},0\right)$ ecuația nu are soluții.

Dacă $m=0$ ecuația are o unică soluție $x=0$. **(1p)**
Dacă $m\in(0,+\infty)$ ecuația are 2 soluții.

III. $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3}$.

Fie D mijlocul segmentului $[AB]$, $D(3,2)$;

Ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$ este: $y-2=\frac{3}{2}(x-3)$.

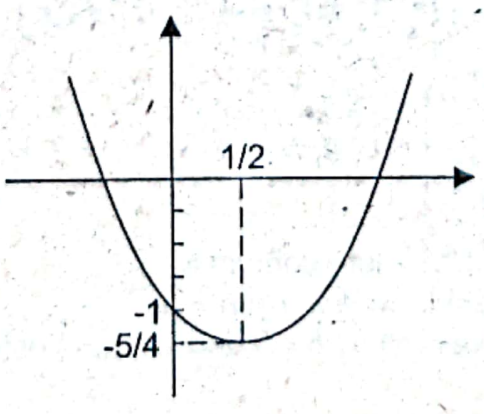
$r=DO=\sqrt{13}$. D este centrul cercului circumscris ΔOBA; **(2p)**
$(x-3)^2+(y-2)^2-13=0$ ecuația cercului circumscris.

Oficiu: (1p)

Testul Nr.12

I. a) $f_a(x)=x^2-x-1$; $f_a(x)=0$; $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$x_V=\frac{1}{2}$, $y_V=-\frac{5}{4}$.



(1p)

Scanned with OKEN Scanner

b) $f(x)=\frac{1}{u}x^2-ux+3u-4$

$\Delta=u^2-\frac{4}{u}(3u-4)=\frac{u^3-12u+16}{u}$ **(0,5p)**

c) $u<0$ şi $\Delta<0$, $\frac{(u+4)(u-2)^2}{u}<0$ şi $u<0\Rightarrow u\in(-4,0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4<\log_a m<0\Leftrightarrow a^{-4}>m>1\Leftrightarrow m\in\left(1,\frac{1}{a^4}\right)$. **(0,5p)**

II. a) $A=a\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

Prin inducție se demonstrează că: $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&0&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}$.

Pentru $a\neq\frac{1}{2}$ avem:

$$B=a\cdot\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}(2a)^{k-1}&0&(2a)^{k-1}\\0&0&0\\(2a)^{k-1}&0&(2a)^{k-1}\end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix}\frac{(2a)^n-1}{2a-1}&0&\frac{(2a)^n-1}{2a-1}\\0&0&0\\\frac{(2a)^n-1}{2a-1}&0&\frac{(2a)^n-1}{2a-1}\end{pmatrix}.$$

Pentru $a=\frac{1}{2}$ obținem: $B=A_{\frac{n}{2}}$. **(1p)**

b) $A_a+A_b=\begin{pmatrix}a&0&a\\0&0&0\\a&0&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b&0&b\\0&0&0\\b&0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&0&a+b\\0&0&0\\a+b&0&a+b\end{pmatrix}$.

$A_a\cdot A_b=\begin{pmatrix}2ab&0&2ab\\0&0&0\\2ab&0&2ab\end{pmatrix}$, $(\forall)\,a,b\in\mathbf{C}$. **(0,5p)**

c) Se verifică uşor axiomele inelului comutativ. **(1p)**

d) Fie A_b şi A_a matrici nenule $\Leftrightarrow a\neq 0$ şi $b\neq 0$:

$A_a\cdot A_b=A_{2ab}\neq O_3$ deoarece $a\cdot b\neq 0$ deci $(A,+,\cdot)$ este inel integru. **(0,5p)**

Scanned with OKEN Scanner

e) f nu este morfism deoarece $f(a\cdot b)\neq f(a)\cdot f(b)$ în general. **(1p)**

III. a) $A\in G_f$

$y-y_0=m(x-x_0),\ m=f'(1)=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\ \ y-\sqrt{2}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}(x-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, este ecuația tangentei la graficul lui f în punctul A.

$B\notin G_f$

Fie $y=m\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$ dreptele ce trec prin B.

Punem condiția ca intersecția cu graficul să fie un punct unic $\Rightarrow$

$\Rightarrow m\left(x-\dfrac{1}{4}\right)=\sqrt{x^2+|x|}$.

Dacă $x>0$ se ajunge la contradicție.

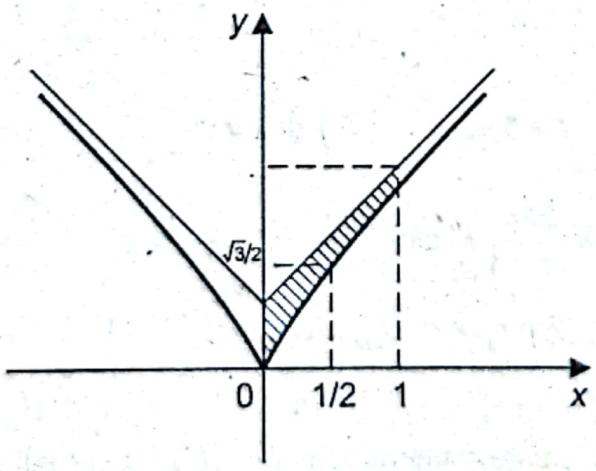
Dacă $x\leq 0\Rightarrow (m^2-1)x^2-\left(\dfrac{m^2}{2}-1\right)x+\dfrac{m^2}{16}=0\Rightarrow m^2=\dfrac{4}{3}\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$;

Cum $m\cdot\left(x-\dfrac{1}{4}\right)>0\Rightarrow m=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Deci ecuația tangentei la graficul lui f ce

conține punctul B este $y=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$. **(1p)**

b) $f(-x)=f(x),\ (\forall)\ x\in\mathbf{R}\Rightarrow f$ este funcție pară $\Rightarrow G_f$ este simetric față de axa Oy.

Asimptota oblică spre $+\infty$ este dreapta $y=x+\dfrac{1}{2}$.



(1p)

c) $A=\int_0^1\left(x+\dfrac{1}{2}-\sqrt{x^2+x}\right)dx=1-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}+\dfrac{1}{8}\ln(3+2\sqrt{2})$. **(1p)**

Oficiu: (1p)

Scanned with OKEN Scanner

Testul Nr. 13

I. 1) $\det A = \begin{vmatrix} m & m+1 & m+2 \\ m+2 & m & m+1 \\ m+1 & m+2 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ m+2 & -2 & -1 \\ m+1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 9(m+1)$.

Dacă $m \in \mathbf{R} - \{-1\}$ $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3 = \operatorname{rg}(\overline{A}) \Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat ($r = n = 3$).

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & m+1 & m+2 \\ 2 & m & m+1 \\ 3 & m+2 & m \end{vmatrix} = 3m+9 \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{m+3}{3(m+1)}.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & 1 & m+2 \\ m+2 & 2 & m+1 \\ m+1 & 3 & m \end{vmatrix} = 3m+9 \Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{m+3}{3(m+1)}.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} m & m+1 & 1 \\ m+2 & m & 2 \\ m+1 & m+2 & 3 \end{vmatrix} = -6m \Rightarrow \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-2m}{3(m+1)} = z.$$

Dacă $m = 1$, $\operatorname{rg}(A) = 2$ şi $\operatorname{rg}(\overline{A}) = 3$ deoarece

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$, deci sistemul este incompatibil. **(2p)**

2) $f = \dfrac{x^{2n+1}-1}{x-1}$, $f = 0 \Rightarrow x^{2n+1} = 1$ şi $x \neq 1$.

$$\varepsilon_k = x_k = \cos\frac{2k\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2k\pi}{2n+1},\ 1 \le k \le 2n.$$

a) $G = U_{2n+1}$. Fie $\varepsilon_k, \varepsilon_j \in U_{2n+1}$, $\varepsilon_k^{2n+1} = \varepsilon_j^{2n+1} = 1$

$(\varepsilon_k \cdot \varepsilon_j)^{2n+1} = \varepsilon_k^{2n+1} \cdot \varepsilon_j^{2n+1} = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \varepsilon_k \cdot \varepsilon_j \in U_{2n+1}$.

Cum U_{2n+1} este mulţimea finită $\Rightarrow U_{2n+1}$ este subgrup al grupului $(\mathbf{C}^*, \cdot)$ deci $(U_{2n+1}, \cdot)$ este grup comutativ. **(1,5p)**

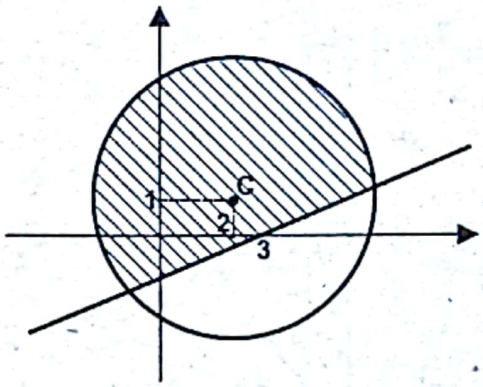
b) $\operatorname{card} G = 2n+1 = \operatorname{card} \mathbf{Z}_{2n+1}$ şi $G = \langle \varepsilon_1 \rangle$ iar $\mathbf{Z}_{2n+1} = \langle \hat{1} \rangle$. Ele fiind grupuri ciclice cu acelaşi număr de elemente rezultă că sunt izomorfe.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $f: G \to \mathbf{Z}_{2n+1}$, $f(\varepsilon_k) = \hat{k}$, $0 \le k \le 2n$. f este bijecție și

$$f(\varepsilon_k \cdot \varepsilon_j) = f(\varepsilon_1^k \cdot \varepsilon_1^j) = f(\varepsilon_1^{k+j}) = \widehat{k+j} = \hat{k} + \hat{j} = f(k) + f(j) \qquad \textbf{(1,5p)}$$

II. A este discul de centru (2, 1) și rază 4 iar B este un semiplan închis. $A \cap B$ este partea haşurată din figura alăturată.



(1p)

III. 1) $m = 2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+x} = a \Rightarrow a = 2$

$$n = -7 = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+bx+c}{x+1} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(b-2)x+c}{x+1} = b-2 \Rightarrow b = -5;$$

$f(2) = 0 \Rightarrow c = 2.$ **(1p)**

2) $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+2}{x+1}$; $f: \mathbf{R} - \{-1\} \to \mathbf{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty \Rightarrow x = -1$ este asimptotă verticală.

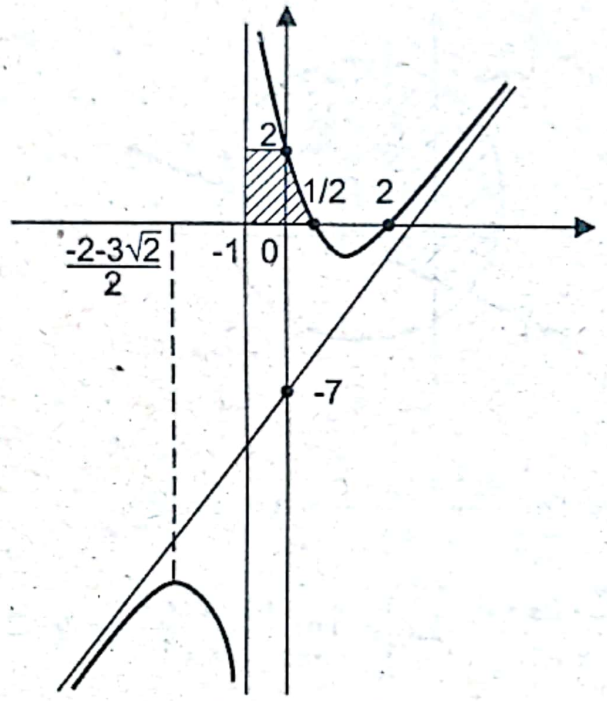
$$f'(x) = \frac{2x^2+4x-7}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2\pm3\sqrt{2}}{2}.$$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$, $x = 2$; $f(0) = 2$.

$\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$; (2, 0), (0, 2) sunt puncte ale graficului lui f.

Scanned with OKEN Scanner

x	$-\infty$		$\frac{-2-3\sqrt{2}}{2}$		-1	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{-2+3\sqrt{2}}{2}$		2		$+\infty$
f'		$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$-\infty$	$\nearrow$	(M)	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	(m)	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



(1,5p)

3) $A=\int_{-1}^{0} 2\,dx+\int_{0}^{1/2}\frac{2x^2-5x+2}{x+1}\,dx=2+(x^2-7x)\Big|_0^{1/2}+9\ln(x+1)\Big|_0^{1/2}=$

$=2-\frac{13}{4}+9\ln\frac{3}{2}=9\cdot\ln\frac{3}{2}-\frac{5}{4}.$ (0,5p)

Oficiu: (1p)

Testul Nr. 14

I. 1) $x\neq 0$

$1+\frac{2}{x}=\frac{x+2}{x}>0\Rightarrow D=(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x}=1$ ecuația nu are soluții deci $G_f \cap Ox = \varnothing$.

$0 \notin D$, $G_f \cap Oy = \varnothing$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizonală la graficul lui f spre $-\infty$ şi spre $+\infty$

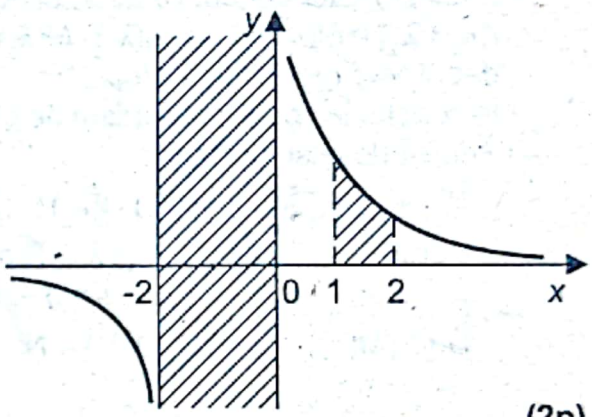
$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = -\infty \Rightarrow x = -2$ asimptotă verticală la stânga

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 0$ asimptotă verticală la dreapta

$$f'(x)=\frac{-2}{x(x+2)}<0,\ (\forall)\, x\in D.$$

$$f''(x)=4\,\frac{x+1}{(x^2+2x)^2}$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'	$-\ -\ -$		‖		$-\ -\ -$		
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖		$+\infty$	$\searrow$	0
f''	$-\ -\ -$		‖		$+\ +\ +$		
	$\cap$		‖		$\cup$		



(2p)

2) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\dfrac{k+2}{k}=\ln\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k+2}{k}=$

$$=\ln\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n-3}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n+2}{n}=\ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ **(1p)**

3) $A=\int_1^2\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)dx=\left(x\cdot\ln\dfrac{x+2}{x}+2\ln(x+2)\right)\Big|_1^2=3\ln\dfrac{4}{3}$. **(1p)**

4) Dacă $m\in(-\infty,0)$ ecuația $f(x)=m$ are o unică soluție în intervalul $(-\infty,-2)$.
Dacă $m=0$ ecuația $f(x)=0$ nu are soluții.
Dacă $m\in(0,+\infty)$ ecuația $f(x)=m$ are o unică soluție în intervalul $(0,+\infty)$.
(0,5p)

Scanned with OKEN Scanner

II. 1)

$$M(\lambda_1)\cdot M(\lambda_2)=\begin{pmatrix}1&0&\lambda_1\\-\lambda_1&1&-\frac{\lambda_1^2}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&\lambda_2\\-\lambda_2&1&-\frac{\lambda_2}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\lambda_1+\lambda_2\\-(\lambda_1+\lambda_2)&1&-\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$= M(\lambda_1+\lambda_2),\ (\forall)\,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}$

Înmulțirea matricelor este asociativă.

Pentru $\lambda = 0$ obținem $I_3 = M(0)$ = element neutru.

Det $M(\lambda) = 1 \neq 0$ și $[M(\lambda)]^{-1} = M(-\lambda)$

$M(\lambda_2)\cdot M(\lambda_1) = M(\lambda_2+\lambda_1) = M(\lambda_1+\lambda_2) = M(\lambda_1)\cdot M(\lambda_2)$ **(1p)**

2) $M(\lambda)\cdot M(-\lambda) = I_3$; $\det[M(\lambda)\cdot M(-\lambda)] = \det M(\lambda)\cdot \det M(-\lambda) = 1$;

Cum $\det M(\lambda) = 1 \Rightarrow \det M(-\lambda) = 1$. **(0,5p)**

3) Dacă $f(\lambda_1) = f(\lambda_2) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ deci f injectivă.

Evident f este surjectivă deci f bijecție.

$f(\lambda_1+\lambda_2) = M(\lambda_1+\lambda_2) = M(\lambda_1)\cdot M(\lambda_2) = f(\lambda_1)\cdot f(\lambda_2)$

deci f este morfism de grup.

În concluzie f este izomorfism de grupuri. **(1p)**

4) Prin inducție se arată că:

$f(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n) = f(\lambda_1)\cdot f(\lambda_2)\cdot\ldots\cdot f(\lambda_n),\ (\forall)\,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\mathbf{R}$.

Pentru $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=\lambda\in\mathbf{R}$ obținem:

$$f(n\lambda) = [f(\lambda)]^n.$$

Deci $[M(\lambda)]^n = M(n\lambda),\ (\forall)\,n\in\mathbf{N}^*$. **(1p)**

III. a) $\Delta = \begin{vmatrix}3&0&1\\4&2&1\\0&4&1\end{vmatrix} = 6+16-12 = 10$; $A = \frac{1}{2}|\Delta| = \frac{1}{2}\cdot 10 = 5$. **(0,5p)**

b) Ecuația dreptei ce trece prin A este: $y = \lambda(x-3)$.

Ecuația dreptei ce conține punctul C și este perpendiculară pe dreapta precedentă este:

$y-4 = -\frac{1}{\lambda}\cdot x$. Locul geometric se determină eliminând parametrul λ între cele 2 ecuații.

$$\lambda = \frac{x}{4-y} \Rightarrow y(4-y) = x(x-3) \Leftrightarrow x^2+y^2-3x+4y = 0$$

adică un cerc cu centrul în punctul $\left(\frac{3}{2},-2\right)$ și de rază $r = \frac{5}{2}$. **(0,5p)**

Oficiu: (1p)

Scanned with OKEN Scanner

Testul Nr. 15

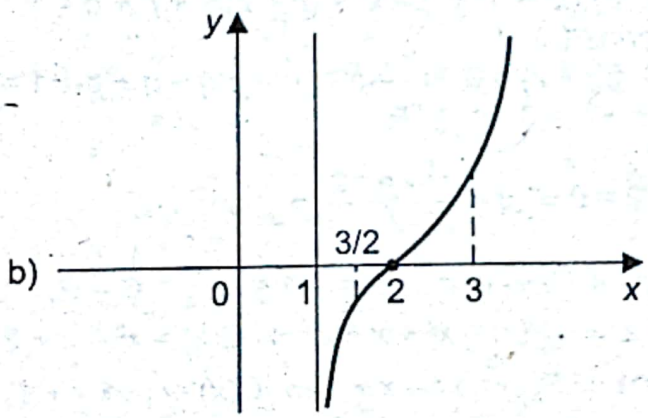
I. 1) a) $D=(1,+\infty)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$;

$$f'(x)=\ln(x-1)+\frac{x}{x-1};\quad f''(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x-2}{(x-1)^2}.$$

x	1		2		$+\infty$
f'	|	+ + 2	+	+	+
f	| $-\infty$	↗	0	↗	↗
f''	|	− − 0	+	+	+ +

$x=2$ singurul punct de inflexiune. (1p)

b)



(1p)

c) $A=-\int_{\frac{3}{2}}^{2} f(x)\,dx+\int_{2}^{3} f(x)\,dx$

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\frac{x^2}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x-1}\,dx$$

$$=\frac{x^2-1}{2}\ln(x-1)-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}\Rightarrow A=\frac{27}{8}\ln 2-\frac{17}{16}$$ (0,5p)

2) $x\in[1,e]\Rightarrow 0\le\ln x\le 1\Rightarrow 0\le\ln^3 x\le 1\Rightarrow$

$\Rightarrow 0\le\int_1^e \ln^3 x\,dx\le\int_1^e dx=x\Big|_1^e=e-1$ deci $0\le I\le e-1$. (0,5p)

Scanned with OKEN Scanner

II. a) Fie $x, y, z \in G$

$(x * y) * z = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) * z = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z)$

$x * (y * z) = x * \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z)$ deci

$(x * y) * z = x * (y * z)$, $(\forall)\, x, y, z \in G$, adică operația "$*$" este asociativă.

$x * e = x \Rightarrow \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} e) = x \Rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} e = \operatorname{tg} x \Rightarrow \operatorname{tg} e = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e = 0 \in G$.

$x * x' = 0 \Rightarrow \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x') = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x' = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x' =$

$= -\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(-x) \Rightarrow x' = -x \in G$ deoarece $f(x) = \operatorname{tg} x$ este bijectivă pe G.

$y * x = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) = x * y$, $(\forall)\, x, y \in G$

(deoarece "+" este comutativă în $\mathbf{R}$). Deci $(G, *)$ este grup comutativ. **(1p)**

b) Funcția $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ este bijectivă

$f(x * y) = f(\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = f(x) + f(y)$, $(\forall)\, x, y \in G$,

adică f este morfism de grup. Deci f este izomorfism de grupuri. **(1p)**

III. 1) a) $P(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 + p(x^2 + 1) + q = x^4 + (p + 2)x^2 + p + q + 1$.

$P(x^2 + 1)$ se divide prin $P(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -p(p^2 + p - 2q + 2) = 0$ şi $-qp + q^2 - p^2q - q + p + 1 = 0$.

Dacă $p = 0 \Rightarrow q^2 - q + 1 = 0$, $q_{1,2} \notin \mathbf{R}$

Dacă $p^2 + p - 2q + 2 = 0 \Rightarrow q = \frac{p^2 + p + 2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow p^4 + 2p^3 + 3p^2 - 2p - 4 = 0 \Rightarrow p_1 = 1, p_2 = -1$ şi $p_{3,4} \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$.

Dacă $p = 1 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow P(x) = x^2 + x + 2 \Rightarrow Q(x) = x^2 - x + 2$. **(1p)**

Dacă $p = -1 \Rightarrow q = 1 \Rightarrow P(x) = x^2 - x + 1 \Rightarrow Q(x) = x^2 + x + 1$.

b) Vom avea de calculat două sume:

$$S_1 = Q(1) + Q(2) + \ldots + Q(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} -$$

$$- \frac{n(n+1)}{2} + 2n = \frac{n(2n^2 + 10)}{6} = \frac{n(n^2 + 5)}{3}.$$

$$S_2 = Q(1) + Q(2) + \ldots + Q(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k + n = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} +$$

$$+ n = \frac{n(2n^2 + 6n + 10)}{6} = \frac{n(n^2 + 3n + 5)}{3}$$ **(1p)**

Scanned with OKEN Scanner

2) a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1-6 = -5 \neq 0$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \\ \alpha & 9 & -3 \end{vmatrix} = -3+27+14\alpha+\alpha+18+63=0;\ 15\alpha + 105 = 0;\ \alpha = -7.$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \\ 2 & \beta & 4 \end{vmatrix} = 4+3\beta+28+2-24+7\beta=0;\ 10\beta + 10 = 0;\ \beta = -1.$

$\Delta_c = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -7 & 9 & l \end{vmatrix} = l+108-28-28-6l+18=0;$

$-5l + 70 = 0 \Rightarrow l = \frac{70}{5} = 14.$

$\Delta_c = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow m-12+8+8-6m-2=0;$

$-5m + 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{2}{5}.$ **(1p)**

b) Notăm $z = \lambda \in \mathbf{R} \Rightarrow \begin{cases} -x+2y=4-\lambda \\ 3x-y=2-7\lambda/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3\lambda+\frac{8}{5} \\ y=-2\lambda+\frac{14}{5}, \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbf{R}.$

(1p)

Oficiu: (1p)

Testul Nr 16

I. 1) $\Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4 & m & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4-2m+4=0 \Rightarrow m=4.$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2 = rg(\overline{A})$, deci sistemul este compatibil nedeterminat;

Notăm $x = \alpha \in \mathbf{R}$: $\begin{cases} y - z = 0 \\ y + z = -2\alpha \end{cases} \Rightarrow y = -\alpha,\ z = -\alpha.$ (1p)

2) Ecuația se scrie: $(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = a$.
Notăm $y = x^2 + 3x$; $y(y + 2) = a \Leftrightarrow y^2 + 2y - a = 0$.

$y_{1,2} > -\frac{9}{4} \Rightarrow \Delta > 0;\ 1 \cdot f\left(-\frac{9}{4}\right) > 0$ și $-\frac{9}{4} < -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a > -1$ și $a < \frac{9}{16} \Rightarrow a \in \left(-1, \frac{9}{16}\right)$. (1,5p)

II. 1) a) Fie $z_1 = x_1 + y_1\sqrt{5} \in G$ și $z_2 = x_2 + y_2\sqrt{5} \in G \Rightarrow$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{Q}$ și $x_1^2 - 5y_1^2 = 1,\ x_2^2 - 5y_2^2 = 1$.

$z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 + 5y_1y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{5}$.

$(x_1x_2 + 5y_1y_2)^2 - 5(x_1y_2 + x_2y_1)^2 = x_1^2x_2^2 + 25y_1^2y_2^2 - 5x_1^2y_2^2 - 5x_2^2y_1^2 =$

$= (x_1^2 - 5y_1^2)(x_2^2 - 5y_2^2) = 1$ deci $z_1 \cdot z_2 \in G$.

Cum $G \subset \mathbf{R}$ rezultă că operația $\cdot$ pe G este asociativă și comutativă.

$1 \in G$ deoarece luăm $x = 1$ și $y = 0$.

$\frac{1}{x + y\sqrt{5}} = \frac{x - y\sqrt{5}}{x^2 - 5y^2} = x - y\sqrt{5} \in G$.

Deci $(G, \cdot)$ este grup comutativ. (1p)

b) Analog se arată ca $(M, \cdot)$ este grup comutativ. (1p)

c) Injectivitatea lui f.

Fie $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow f(x_1 + y_1\sqrt{5}) = f(x_2 + y_2\sqrt{5}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & 2y_1 \\ \frac{5y_1}{2} & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & 2y_2 \\ \frac{5y_2}{2} & x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2 \Rightarrow z_1 = z_2$

adică f este injectivă.

Fie $A \in M$, $A = \begin{pmatrix} x & 2y \\ \frac{5y}{2} & x \end{pmatrix}$, $(\exists) z = x + y\sqrt{5} \in G$ a.î. $f(z) = A$ deci f este surjecție $\Rightarrow f$ bijectivă.

Scanned with OKEN Scanner

$f(z_1 \cdot z_2) = f(x_1x_2 + 5y_2y_2 + \sqrt{5}(x_1y_2 + x_2y_1)) =$

$= \begin{pmatrix} x_1x_2 + 5y_1y_2 & 2(x_1y_2 + x_2y_1) \\ \frac{5}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) & x_1x_2 + 5y_1y_2 \end{pmatrix} = f(z_1) \cdot f(z_2)$, deci f este morfism de grupuri $\Rightarrow f$ este izomorfism de grupuri. **(0,5p)**

2) a) $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$ reprezintă ecuația cercului de rază r cu centrul în punctul de coordonate $C(a, b)$.

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

Identificând obținem

$$a = 3,\ b = -\frac{3}{2} \text{ şi } r = \frac{\sqrt{65}}{2}. \quad \textbf{(0,5p)}$$

b) Punctul $A(-1, -2)$ aparține cercului, deci ecuația tangentei se va scrie prin dedublare; Rezultă

$8x + y + 10 = 0.$ **(0,5p)**

III. a) $y = mx + n$ este asimptotă;

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2 + bx + 2}{x^2 - x} = a = 1;$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 + bx + 2}{x^2 - 1} - x \right) = b + 1 = 2 \Rightarrow b = 1. \quad \textbf{(1p)}$$

b) $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$, $(\forall) x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

Ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții reale deci graficul lui f nu intersectează axa Ox,

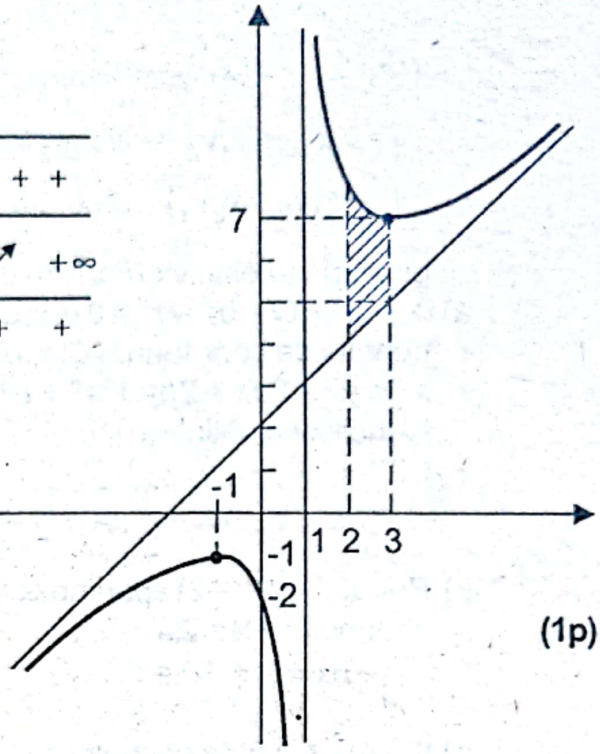
$f(0) = -2 \Rightarrow A(0, -2) \in G_f$; $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = +\infty \Rightarrow$ dreapta verticală de ecuație $x = 1$ este asimptotă verticală; $y = x + 2$ este asimptotă oblică la graficul lui f spre $+\infty$ şi spre $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; f este indefinit derivabilă.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} \text{ şi } f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -1;\ f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3};$$

Scanned with OKEN Scanner

x	$-\infty$		-1		0		1		3		
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
f	$-\infty$	↗	-1 (M)	↘	$-\infty$		$+\infty$	↘	7 (m)	↗	$+\infty$
f''	$-$	$-$	$-$	$-$			$+$	$+$	$+$	$+$	



(1p)

c) $A=\int_2^3\left[\frac{x^2+x+2}{x-1}-(x+2)\right]dx=4\cdot\int_2^3\frac{1}{x-1}dx=4\cdot\ln(x-1)\Big|_2^3$ (1p)

$=4\cdot\ln 2-4\cdot\ln 1=4\cdot\ln 2=\ln 16.$

Oficiu: (1p)

Testul Nr. 17

I. 1) $\text{Det}(A)\neq 0,\ (\forall)\ x\in\mathbf{R}.$

$\det A=(1-m)x^2+2x+3-2m,\ m\neq 1.$

$\Delta<0\Leftrightarrow 2m^2-5m+2>0\Leftrightarrow m\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$ (1p)

2) Conform relațiilor lui Viète avem:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-1\\x_1\cdot x_2\cdot x_3=a\end{cases}$$

$S_k=x_1^k+x_2^k+x_3^k$

$$\begin{cases} x_1^3 - x_1 - a = 0 \mid x_1^{k-3} \\ x_2^3 - x_2 - a = 0 \mid x_2^{k-3} \\ x_3^3 - x_3 - a = 0 \mid x_3^{k-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^k - x_1^{k-2} - a\,x_1^{k-3} = 0 \\ x_2^k - x_2^{k-2} - a\,x_2^{k-3} = 0 \\ x_3^k - x_3^{k-2} - a\,x_3^{k-3} = 0 \end{cases}.$$

$S_k - S_{k-2} - a\,S_{k-3} = 0 \Rightarrow S_k = S_{k-2} + a\,S_{k-3}$, $(\forall) k \geq 3$

$S_0 = 3$, $S_1 = 0$, $S_2 = 2$, $S_3 = 3a$, $S_4 = 2$, $S_5 = 5a$, $S_6 = 3a^2 + 2$.

Inegalitatea se va scrie

$$3a^2 + 2 \geq 5a \Leftrightarrow 3a^2 - 5a + 2 \geq 0 \Rightarrow a \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [1, +\infty). \qquad \textbf{(1,5p)}$$

II. 1) Fie $x, y \in (-1, 1) \Leftrightarrow |x| < 1$ şi $|y| < 1 \Rightarrow |xy| = |x| \cdot |y| < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \cdot y \in (-1, 1) \Rightarrow -1 < x \cdot y < 1 \Rightarrow 1 + xy > 0$.

Arătăm că:

$$-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1 \; ; \quad -1 < \frac{x+y}{1+xy} \Leftrightarrow (1+x)(1+y) > 0$$

adevărată deoarece $1 + x > 0$ şi $1 + y > 0$.

$$\frac{x+y}{1+xy} < 1 \Leftrightarrow (1-x)(1-y) > 0$$

adevărată, deoarece $1 - x > 0$ şi $1 - y > 0$.

Fie $x, y, z \in G$;

$$(x * y) * z = \frac{x+y}{1+xy} * z = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz+zx}.$$

$$x * (y * z) = x * \frac{y+z}{1+yz} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz+zx}.$$

Rezultă că operația $*$ este asociativă.

$$x * e = x \Rightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x \Rightarrow x + e = x + x^2 \cdot e \Rightarrow e(1-x^2) = 0, \; (\forall) x \in G$$

$\Rightarrow e = 0 \in G$.

$$x * x' = 0 \Rightarrow \frac{x+x'}{1+x'} = 0 \Rightarrow x + x' = 0 \Rightarrow x' = -x \in G.$$

$$y * x = \frac{y+x}{1+yx} = \frac{x+y}{1+xy} = x * y, \; (\forall) x, y \in G$$

deci $(G, *)$ este grup abelian. **(1,5p)**

2) grad $f = 3$. f ireductibil în $\mathbf{Z}_3[X] \Leftrightarrow f$ nu are rădăcini în $\mathbf{Z}_3$;

$f(\hat{0}) = \hat{1} \neq \hat{0}$; $\quad f(\hat{1}) = n + \hat{2} \neq \hat{0} \Rightarrow n \neq \hat{1}$.

$f(\hat{2}) = \hat{2} \cdot n \neq 0 \Rightarrow n \neq \hat{0}$. Deci $n = \hat{2}$. **(1p)**

Scanned with OKEN Scanner

III. 1) $f'(x)=\dfrac{-2ax^2+2x-2bx+2a}{(x^2+1)^2}$ $\qquad f'(x)=0 \Rightarrow$

$ax^2+x(b-1)-a=0$ şi $\Delta=(b-1)^2+4a^2>0 \Rightarrow (\exists)\, x_1, x_2 \in \mathbf{R}$,

$x_1 \neq x_2$ a.î. $f'(x_1)=f'(x_2)=0$; $\qquad x_1 \cdot x_2=\dfrac{-a}{a}=-1$. **(1p)**

2)

$$\left.\begin{array}{r} f(1)=2 \Rightarrow 2a+b=3 \\ f'(2)=0 \Rightarrow -3a-2b+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=4 \text{ şi } b=-5. \quad \textbf{(1p)}$$

3) $f(x)=\dfrac{x^2+8x-5}{x^2+1}$; $\qquad f(x)=0 \Rightarrow x_{1,2}=-4\pm\sqrt{21}$.

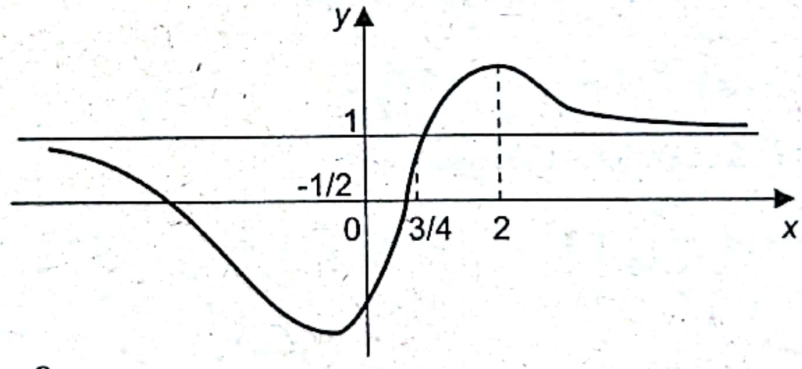
$f'(x)=\dfrac{-8x^2+12x+8}{\left(x^2+1\right)^2}$; $f'(x)=0 \Rightarrow x_1=2,\ x_2=-\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1 \Rightarrow y=1$ asimptotă orizontală pentru graficul lui f spre $+\infty$ şi spre $-\infty$.

f continuă pe $\mathbf{R} \Rightarrow f$ nu are asimptote verticale.

x	$-\infty$		$-4-\sqrt{21}$		$-\frac{1}{2}$		0		$-4+\sqrt{21}$		2		0		$+\infty$
f'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
f	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-7	$\nearrow$	-5	$\nearrow$	0	$\searrow$	3	$\searrow$		$\searrow$	1

(1p)



4) $-4+\sqrt{21}<\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow 4\sqrt{21}<19 \Leftrightarrow 16\cdot 21<19^2 \Leftrightarrow 336<361$ adev.

$$A=\int_{\frac{3}{4}}^{2}(f(x)-1)\,dx=\int_{\frac{3}{4}}^{2}\left(\frac{x^2+8x-5}{x^2+1}-1\right)dx=\int_{\frac{3}{4}}^{2}\frac{8x-6}{x^2+1}dx=$$

$$=4\int_{\frac{3}{4}}^{2}\frac{2x}{x^2+1}\,dx-6\int_{\frac{3}{4}}^{2}\frac{1}{x^2+1}\,dx=4\cdot\ln\left(x^2+1\right)\Big|_{\frac{3}{4}}^{2}-6\operatorname{arctg}x\Big|_{\frac{3}{4}}^{2}=$$

$$=4\ln 5-4\ln\frac{25}{16}-6\operatorname{arctg}2+6\operatorname{arctg}\frac{3}{4}=4\ln\frac{16}{5}+6\operatorname{arctg}\frac{3}{4}-6\operatorname{arctg}2. \quad \textbf{(1p)}$$

Oficiu: (1p)

Scanned with OKEN Scanner

Testul Nr. 18

I. 1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-2 = -3 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A \geq 2$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & \alpha \end{vmatrix} = -3\alpha + 15$$

Dacă $\alpha \in \mathbf{R} - \{5\}$ rezultă $\det A \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 3$ deci sistemul este compatibil determinat. Aplicând formulele lui Cramer obținem:
$x = 0,\ y = 2,\ z = 0.$

Dacă $\alpha = 5 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2$ şi $\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{rg} \overline{A} = 2 \Rightarrow$ sistemul este compatibil nedeterminat; x şi y sunt necunoscute principale, z este necunoscuta secundară.
Notăm $z = \lambda \in \mathbf{R}$;

$$\begin{cases} x + y = 2 - \lambda \\ 2x - y = -2 + 2\lambda \end{cases} \qquad 3x = \lambda \Rightarrow x = \frac{\lambda}{3},$$

$$y = 2 - \lambda - \frac{\lambda}{3} = 2 - \frac{4\lambda}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda}{3} \\ y = 2 - \frac{4\lambda}{3}, \ \lambda \in \mathbf{R}. \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \textbf{(2p)}$$

2) $x \neq 1,\ y \neq 1 \Rightarrow \ln x \neq 0$ şi $\ln y \neq 0 \Rightarrow \ln x \cdot \ln y \neq 0 \Rightarrow e^{\ln x \cdot \ln y} \in G$.
$(x * y) * z = e^{\ln x \cdot \ln y} * z = e^{\ln x \cdot \ln y \cdot \ln z}$
$x * (y * z) = x * e^{\ln y \cdot \ln z} = e^{\ln x \cdot \ln y \cdot \ln z} \Rightarrow$ " $*$ " este asociativă.
$x * \alpha = x \Rightarrow e^{\ln x \cdot \ln \alpha} = x \Rightarrow \ln x \cdot \ln \alpha = \ln x \Rightarrow \ln \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = e \in G$ este element neutru.

$$x * x' = e \Rightarrow e^{\ln x \cdot \ln x'} = e \Rightarrow \ln x \cdot \ln x' = 1 \Rightarrow \ln x' = \frac{1}{\ln x} \Rightarrow x' = e^{\frac{1}{\ln x}} \in G.$$

(1,5p)

$y * x = e^{\ln y \cdot \ln x} = e^{\ln x \cdot \ln y} = x * y,\ (\forall)\ x, y \in G \Rightarrow (G, *)$ grup comutativ.

II. a) $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 4x - a}{(x+1)^2}$; $\quad f'(1) = 0 \Rightarrow 6 - a = 0 \Rightarrow a = 6$ **(1p)**

b) $f(x)=\dfrac{2x^2+6}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=+\infty \Rightarrow x=-1$ este asimptotă verticală;

$y=mx+n$ asimptotă verticală spre $+\infty$.

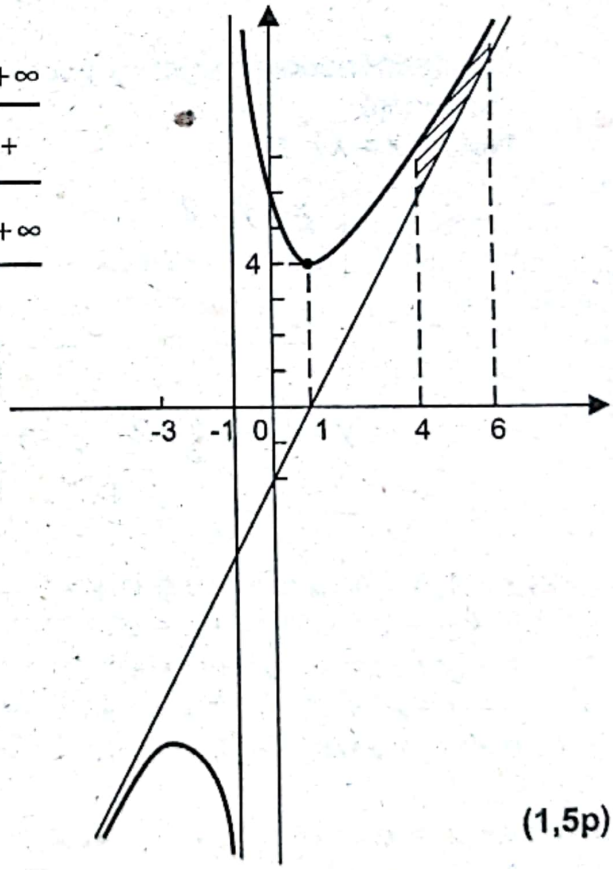
$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+6}{x^2+x}=2;$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+6}{x+1}=-2\Rightarrow y=2x-2$$

este asimptotă oblică spre $+\infty$. Analog se determină $y=2x-2$ asimptotă spre $-\infty$.

$$f'(x)=2\,\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=0\Rightarrow x_1=1,\ x=-3.$$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
f'	$+$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$+$
f	$-\infty$ ↗	↗	-12	↘	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	↘	4	↗	$+\infty$



(1,5p)

c) $A=\int_4^6\left[\dfrac{2x^2+6}{x+1}-(2x-2)\right]dx=8\int_4^6\dfrac{1}{x+1}dx=8\ln(x+1)\Big|_4^6=$

$=8\ln7-8\ln5=8\ln\dfrac{7}{5}$. (1p)

Scanned with OKEN Scanner

III. a) Fie cercul de centru $C(a, b)$ şi rază r.

$C \in d \Rightarrow 3a + 2b - 10 = 0$.

Ecuația cercului este: $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$

$A \in \mathbf{C} \Rightarrow a^2 + (4-b)^2 - r^2 = 0$

$B \in \mathbf{C} \Rightarrow (3-a)^2 + (5-b)^2 - r^2 = 0$.

Prin scăderea celor două relații obținem:

$$\begin{array}{l} 6a + 2b = 18 \\ -3a - 2b = -10 \\ \hline 3a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{3} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow C\left(\frac{8}{3}, 1\right) \end{array}$$

$$r^2 = \frac{64}{9} + 9 = \frac{145}{9} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{145}}{3}.$$

Ecuația cercului va fi:

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + (y-1)^2 - \frac{145}{9} = 0. \qquad \textbf{(1p)}$$

b) $m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = 12 \rightarrow m' = -\frac{1}{12}$

Ecuația tangentei la cerc în B este:

$$y - 5 = -\frac{1}{12}(x-3). \qquad \textbf{(0,5p)}$$

c) $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ \frac{8}{3} & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{32}{3} \Rightarrow A = \frac{1}{2}|\Delta| = \frac{16}{3}.$ **(0,5p)**

Oficiu: (1p)

Testul Nr. 19

I. 1) $\begin{vmatrix} x+2 & x & x \\ x & x+2 & x \\ x & x & x+2 \end{vmatrix} = (x+2)^3 + 2x^3 - 3x^2(x+2) = 12x + 8.$

$\Delta = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}.$ **(1,5p)**

2) $\Delta \neq 0$; $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = a^2 + 2 \neq 0, \quad (\forall) a \in \mathbf{R}$. (1,5p)

II. $x, y \in \mathbf{Q}$ şi $x^2 - 2y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$

(deoarece pentru $y \neq 0$, $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{2} \in \mathbf{Q}$!;

$\det A = x^2 - 2y^2 \neq 0$; Fie $A, B \in G \Rightarrow \det A \neq 0$ şi $\det B \neq 0 \Rightarrow \det(A \cdot B) =$
$= \det(A) \cdot \det(B) \neq 0$.

$$AB = \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' & 2y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot x' + 2yy' & 2(yx' + x \cdot y') \\ x'y + x \cdot y' & xx' + 2yy' \end{pmatrix} \Rightarrow AB \in G .$$

Cum $G \subset M_2(\mathbf{Q})$ rezultă că " $\cdot$ " este asociativă pe G.
Pentru $x = 1$ şi $y = 0 \Rightarrow I_2 \in G$.

$A^T = \begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix}$; $A^* = \begin{pmatrix} x & -2y \\ -y & x \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* \in G$ deci $(G, \cdot)$ este grup.

(2p)

III. 1) $f'(x) = \frac{-x^2 - 2ax + 2a - 3}{(x^2 - 2x - 3)^2}$; $f'(0) = \frac{2a - 3}{9} = 1 \Rightarrow a = 6$. (2p)

2) $A = \int_4^5 \frac{x+1}{(x+1)(x-3)} dx = \int_4^5 \frac{1}{x-3} = \ln(x-3) \Big|_4^5 = \ln 2$. (2p)

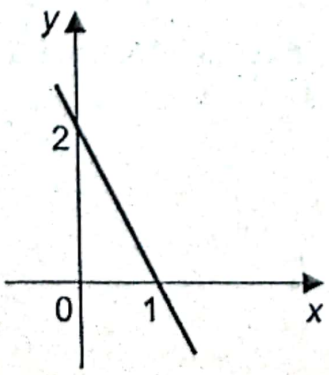
Oficiu: (1p)

Testul Nr. 20

I. 1) $m^3 - m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m_1 = 2$. Împărţim prin $m - 2$

	1	−1	−1	−2
2	1	1	1	0

$m^2 + m + 1 = 0$, $m_{2,3} \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$.
Pentru $m = 2$ obţinem $f(x) = -2x + 2$. (1p)



2) $f'(x) = 3(m^3 - m^2 - m - 2)x^2 - m = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{m}{3(m^3 - m^2 - m - 2)}$.

Notăm $g(m) = m^3 - m^2 - m - 2$.

m			0		2			
$g(m)$	−	−	−	−	0	+	+	+

$\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{m}{3(m^3 - m^2 - m - 2)} < 0$, dacă $m \in (0, 2)$, contradicție.

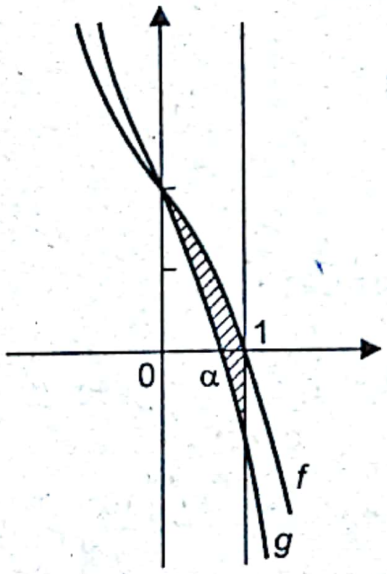
Deci f nu admite extreme. **(1p)**

3) $m = 0$, $f(x) = -2x^3 + 2$,

$f(1) = 0$, $f(0) = 2$, $f'(x) = -6x^2$, $f''(x) = -12x$

$m = 1$, $g(x) = -3x^3 - x + 2$,

$g(0) = 2$, $g'(x) = -9x^2 - 1$, $g''(x) = -18x$; $g'(x) < 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow g$ strict descrescătoare. Cum g este continuă $\Rightarrow g$ are proprietatea Darboux (P.D.) și $g(0) \cdot g(1) < 0$ $(\exists!)\, \alpha \in (0,1)$ a.î. $g(\alpha) = 0$



(1,5p)

4) $A = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^\alpha g(x)dx - \int_\alpha^1 g(x)dx$.

Fie $F(x) = \int g(x)\,dx = -\dfrac{3}{4}x^4 - \dfrac{x^2}{2} + 2x$.

$A = \dfrac{3}{2} - F(\alpha) + F(0) - F(1) + F(\alpha) = \dfrac{3}{2} + F(0) - F(1) = \dfrac{3}{4}$. **(2p)**

Scanned with OKEN Scanner

II. $\det A = \begin{vmatrix} 4 & m & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 2m = 0 \Rightarrow m = 4$. (1p)

III. Dacă $a, b \in \mathbf{Q}$ şi $a + b\sqrt{c} = 0$, $c \in \mathbf{Q}$ şi $\sqrt{c} \notin \mathbf{Q}$ atunci $a = b = 0$.

Dacă $b \neq 0 \Rightarrow \sqrt{c} = -\frac{a}{b} \notin \mathbf{Q}$! Deci $b = 0 \Rightarrow a = 0$.

Dacă $f(a_1 + b_1\sqrt{c}) = f(a_2 + b_2\sqrt{c}) \Rightarrow a_1 - b_1\sqrt{c} = a_2 - b_2\sqrt{c} \Rightarrow a_1 - a_2 -$

$-(b_1 - b_2)\sqrt{c} = 0 \Rightarrow a_1 = a_2$ şi $b_1 = b_2 \Rightarrow f$ injectivă.

Fie $a + b\sqrt{c} \in C$ $(\exists)$ $x = a - b\sqrt{c} \in C$ a.î. $f(a - b\sqrt{c}) = a + b\sqrt{c}$ deci f este surjectivă $\Rightarrow f$ bijectivă.

$f(x+y) = f\left((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{c}\right) = a_1 + a_2 - (b_1 + b_2)\sqrt{c} =$

$= \left(a_1 - b_1\sqrt{c}\right) + \left(a_2 - b_2\sqrt{c}\right) = f(x) + f(y)$.

Analog: $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

$f(1) = 1$, deci este morfism de corpuri.

Deci f este izomorfism de corpuri. (2,5p)

Oficiu: (1p)

Testul Nr. 21

I. 1) $a = \underbrace{44\ldots4}_{n \text{ cifre}} \cdot 10^n + \underbrace{22\ldots2}_{n \text{ cifre}} = 4 \cdot 10^n \left(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1\right) +$

$+2\left(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1\right) = 4 \cdot 10^n \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 2\frac{10^n - 1}{9} =$

$E = 2\left(\frac{10^n - 1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}\right) = b \cdot (b + 1)$

unde $b = 2\left(\frac{10^n - 1}{3}\right) \in \mathbf{N}$ deoarece $3 \mid 10^n - 1$. (1p)

2) Metoda aritmetică – metoda falsei ipoteze.

Presupunem că toate cele 31 de vagoane au 3 osii $\Rightarrow 31 \cdot 3 = 93$.

$105 - 93 = 12$ (în minus).

Raţionamentul cu privire la raportul 3 ; 1 $\Rightarrow$ 1 vagon cu 2 osii şi 3 vagoane cu 4 osii $\Rightarrow$ un grup de 4 vagoane. Un grup are $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 14$ osii.

Scanned with OKEN Scanner

Un grup de 4 vagoane a câte 3 osii are $4 \cdot 3 = 12$ osii.
Raționamentul: $14 - 12 = 2$ osii (mai puțin), $12 : 2 = 6$ grupuri. Deci vor fi:
6 vagoane a câte 2 osii, 7 vagoane a câte 3 osii şi 18 vagoane a câte 4 osii.
(1p)

II. 1) $x(n+2) = 4n \Rightarrow x = \frac{4n}{n+2} = \frac{4n+8-8}{n+2} = 4 - \frac{8}{n+2} \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow n+2 \mid 8 \Rightarrow n+2 \in \{1; 2, 4, 8\} \Rightarrow n \in \{0, 2, 6\} \Rightarrow A = \{0, 2, 3\}.$

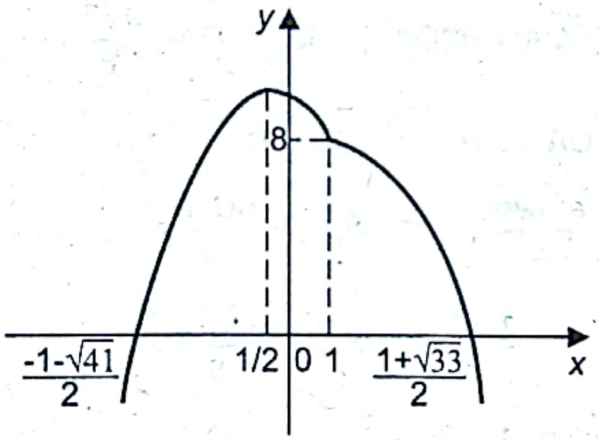
$x(3n+1) = 6n+7 \Rightarrow x = \frac{6n+7}{3n+1} = 2 + \frac{5}{3n+1}.$

$3n + 1 \in \{1, -1, 5, -5\} \Rightarrow n \in \{-2, 0\} \Rightarrow B = \{1, 7\}.$

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 7\}$; $A \cap B = \varnothing$; $A - B = A$, $B - A = B$,

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = A \cup B$: $A \times B = \{(0, 1), (0, 7), (2, 1), (2, 7), (3, 1), (3, 7)\}$: $B \times A = \{(1, 0), (1, 2), (1, 3), (7, 0), (7, 2), (7, 3)\}$. **(1p)**

2) a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 10, & \text{pentru } x < 1 \\ -x^2 + x + 8, & \text{pentru } x \geq 1. \end{cases}$



(1p)

b) Dacă $x < 1$ şi $f(x) = 4 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$, $x_1 = -3 \in (-\infty, 1)$

$x_2 = 2 \notin (-\infty, 1)$

Dacă $x \in [1, +\infty)$ şi $f(x) = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \notin [1, +\infty)$

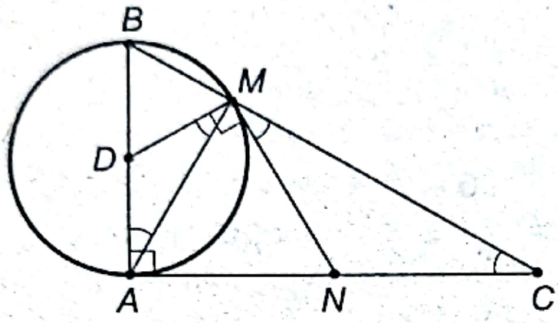
$x_4 = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \in [1, +\infty).$ **(1p)**

III. Verificarea axiomelor. **(1p)**

Scanned with OKEN Scanner

IV. 1) Fie D mijlocul segmentului $[AB]$ şi $MN \perp DM$, $\widehat{DAM} = \widehat{DMA} \equiv \hat{C}$ deoarece ΔDMA este isoscel şi $\hat{B}$ este complementul unghiurilor $\hat{C}$ şi $\widehat{DAM}$. $\widehat{NMC} \equiv \widehat{DMA}$ deoarece au acelaşi complement $\widehat{AMN}$. $\Rightarrow \Delta NMC$ este isoscel $\Rightarrow NM = NC$.

$\widehat{NAM} \equiv \widehat{NMA}$ deoarece au complemente egale $\Rightarrow MN = AN \Rightarrow NA = NC$.



(1p)

2) a) $A_t = S_{DAO} + S_{DAB} + S_{DBC} + S_{DCO}$

$S_{DAO} = \dfrac{3a^2}{8}$, $m(\widehat{COA}) = m(\widehat{OAB}) = 90^\circ \Rightarrow OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$DO \perp (ABCO)$ şi $OA \perp AB \overset{T.3\perp}{\Rightarrow} DA \perp AB$.

$S_{DAB} = \dfrac{DA \cdot AB}{2} = \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{6}}{4}$; $S_{DBC} = \dfrac{BC \cdot DP}{2}$.

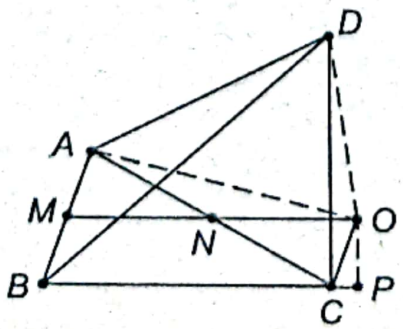
$DP = \dfrac{a\sqrt{15}}{4} \Rightarrow S_{DBC} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{8}$; $S_{DOC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

$A_b = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{8}$.

$A_t = A_l + A_b$ **(1p)**

b) $V = \dfrac{A_b \cdot l}{3} = \dfrac{3a^2}{16}$. **(1p)**

Oficiu: (1p)



Testul Nr. 22

I. 1) Se impune condiția $\det(A) \neq 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m - 11 \neq 0 \Rightarrow m \in \mathbf{R} - \{-11\}. \qquad \textbf{(0,5p)}$$

2) Pentru $m = -11$ avem $\operatorname{rg} A = 2$. Pentru ca sistemul să fie incompatibil vom avea $\operatorname{rg} \overline{A} = 3 \Leftrightarrow \Delta_c \neq 0$.

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & p \\ -11 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -14p - 147 \neq 0 \Rightarrow p \neq -\frac{21}{2}.$$

Deci $m = -11$ şi $p \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{21}{2}\right\}$. **(0,75p)**

3) Pentru $m = -11$ şi $p = -\frac{21}{2}$ sistemul este compatibil nedeterminat.

Notăm $z = \lambda \in \mathbf{R}$ şi rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} 3x + y = 5 + \lambda \\ x - 2y = -\frac{21}{2} - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{14} + \frac{\lambda}{7} \\ y = \frac{73}{14} + \frac{4\lambda}{7}, \quad \lambda \in \mathbf{R}. \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \textbf{(1,25p)}$$

II. Fie $x, y, z \in \mathbf{R}$

1) $(x * y) * z = (ax + by - 2) * z = a^2x + aby + bz - 2a - 2$

$x * (y * z) = x * (ay + bz - 2) = ax + aby + b^2z - 2b - 2.$

Identificând obținem $a = b = 1$, deoarece $a = b = 0$ nu convine. Determinăm elementul neutru e:

$$x * e = x \Rightarrow x + e - 2 = x \Rightarrow e = 2.$$

Determinăm elementul simetrizabil x' în raport cu prima operație

$$x * x' = 2 \Rightarrow x * x' - 2 = 2 \Rightarrow x' = 4 - x \in \mathbf{R};$$

$$y * x = y + x - 2 = x + y - 2 = x * y, \ (\forall)\, x, y \in \mathbf{R}$$

deci $(\mathbf{R}, *)$ este grup comutativ. **(1p)**

Operația "$\circ$" este asociativă.

Scanned with OKEN Scanner

Determinăm elementul neutru α față de operția "$\circ$"

$$x \circ \alpha = x \Rightarrow x \cdot \alpha - 2x - 2\alpha + 6 = x \Leftrightarrow (\alpha - 3)(x - 2) = 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}$$

deci $\alpha = 3$. Arătăm că $(\forall)\, x \in \mathbf{R} - \{2\}$ este simetrizabil:

$$x \circ x' = 3 \Rightarrow x'(x-2) = 2x - 3 \Rightarrow x' = \frac{2x-3}{x-2} \in \mathbf{R} - \{2\}$$

$$y \circ x = y \cdot x - 2y - 2x + 6 = x \cdot y - 2x - 2y + 6 = x \circ y,\ (\forall)\, x, y \in \mathbf{R}.$$

Se verifică uşor că:

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z) \text{ şi}$$
$$(y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x)$$

adică axiomele de distributivitate. Deci $(\mathbf{R}, *, \circ)$ este corp comutativ. **(1p)**

2) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ izomorfism de corpuri $\Rightarrow f(0) = 2$ şi $f(1) = 3 \Rightarrow m = 1$ şi $n = 2$.
Se verifică uşor că $f(x) = x + 2$ este izomorfism de corpuri. **(0,5p)**

III. $M = \overline{abac}$, $a \neq 0$, $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$ şi $a, b, c \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.

$$2a + b + c = 10a + c \Rightarrow 8a = b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

deci $a = 1$ şi $b = 8$. Deci $M = \overline{181c}$ unde $c \in \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$. **(1p)**

IV. Fie x lungimea totală măsurată în cm a sârmei.

$$\text{I. } \frac{1}{3}x + 80; \qquad \text{II. } \frac{2}{9}x + \frac{70}{3}; \qquad \text{III. } \frac{1}{3}\left[x - \frac{1}{3} - 80 - \frac{2}{3}x + \frac{70}{3}\right] + 20.$$

Însumând şi egalând cu x obținem ecuația:

$$\frac{8}{27} \cdot x = \frac{800}{9} \Rightarrow x = 300.$$

I. 180 cm; II. 90 cm; III. 30 cm. **(2p)**

V. $L = 240$ cm, $\ell = 150$ cm, $h = 60$ cm.
Se pot forma 8 cilindri. Volumul ce se pierde este de

$$240 \cdot 150 \cdot 60 \text{ cm}^3 - 8 \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 60 \text{ cm}^3 =$$
$$= 108\,000 \cdot (20 - \pi) \text{ cm}^3 = 108 \cdot (20 - \pi) \text{ dm}^3. \quad \textbf{(1p)}$$

Oficiu: (1p)

Testul Nr. 23

I. 1) $x + 3 \geq 0,\ 2x - 1 \geq 0,\ x \geq 0 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

Cum

$$\sqrt{x}\geq 0\Rightarrow x+3\geq 2x-1\Rightarrow x\leq 4\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{2},4\right].$$

Ridicând la pătrat se obține ecuația:

$$x+1=\sqrt{(x+3)(2x-1)}\,.$$

Ridicând la pătrat se obține ecuația:

$$x^2+3x-4=0\Rightarrow x_1=1\in\left[\frac{1}{2},\,4\right],\ x_2=-4\notin\left[\frac{1}{2},\,4\right].$$

Deci ecuația are unica soluție $x=1$. **(1p)**

2) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & \alpha & 1\\ 1 & -1 & 1 & \beta\end{pmatrix}$; $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0\Rightarrow \operatorname{rg}A\geq 2$.

Cum

$$\operatorname{rg}A=2\Rightarrow\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & \alpha\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0\ \text{şi}\ \begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & \beta\end{vmatrix}=0\Rightarrow\alpha=\beta=-1.$$

Sistemul fiind compatibil $\Rightarrow \operatorname{rg}\overline{A}=2\Leftrightarrow\Delta_c=0$. Deci:

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & \gamma\end{vmatrix}=0\Rightarrow\gamma=1\ ;$$

x_1, x_2 sunt necunoscute principale iar x_3, x_4 sunt necunoscute secundare.
Notăm $x_3=\lambda_1$, $x_4=\lambda_2$.

$$\begin{cases}2x_1-x=1-\lambda_1+\lambda_2\\ x_1+x_2=-1+\lambda_1-\lambda_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=-1+\lambda_1-\lambda_2\\ x_3=\lambda_1\\ x_4=\lambda_2\end{cases},\ \lambda_1\lambda_2\in\mathbf{R}.$$ **(1p)**

3) Se verifică că $(K,*)$ este grup comutativ.

Fie $x, y, z\in(0,+\infty)$; $(x\circ y)\circ z=x^{\ln y}\circ z=\left(x^{\ln y}\right)^{\ln z}=x^{\ln y\cdot\ln z}$.

$x\circ(y\circ z)=x\circ y^{\ln z}=\left(x^{\ln y}\right)^{\ln z}=x^{\ln z\cdot\ln y}$, deci operația este asociativă.

$x\circ\alpha=x\ \Rightarrow\ x^{\ln\alpha}=x\Rightarrow\ln\alpha=1\Rightarrow\alpha=e$.

Fie $x\neq 1$;

$$x\circ x'=e\Rightarrow x^{\ln x'}=e\Rightarrow\ln x'\cdot\ln x=1\Rightarrow\ln x'=\frac{1}{\ln x}\Rightarrow x'=e^{\frac{1}{\ln x}};\ \ln x\neq 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

$y \circ x = y^{\ln x} = x^{\ln y} = x \circ y$ deci " $\circ$ " este comutativă.

$x \circ (y * z) = x \circ (y \cdot z) = x^{\ln(y \cdot z)} = x^{\ln y + \ln z} = x^{\ln y} \cdot x^{\ln z} = (x \circ y) * (x \circ z)$.

Analog

$(y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x)$. **(1p)**

Deci $(K, *, \circ)$ este corp comutativ.

II. 1) $\frac{PC}{NB} = \sqrt{2}$; 2) a) 65π; b) $V = \frac{468\pi}{5}$; c) $\frac{400\pi}{9}$; d) $\frac{169}{24}$ **(2p)**

III. 1) $c = 0 = b \Rightarrow a \in \{3, 6, 9\}$; $c = 0$ şi $b = 2 \Rightarrow a \in \{1, 4, 7\}$;

$c = 5$ şi $b = 0 \Rightarrow a \in \{1, 4, 7\}$; $c = 5$ şi $b = 2 \Rightarrow a \in \{2, 5, 8\}$;

2) $x = 199$, $y = 597$, $z = 1200$

3) a) $d = 360$ km

b) $d_1 = 252$ km, $d_2 = 216$ km

c) $v_1 = 157{,}5$ km/h, $v_2 = 135$ km/h **(1p)**

Oficiu: (1p)

Testul Nr. 24

I. 1) $f(1) = 4$, $f(-2) = -5$, $f(-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m + n + p = 3 \\ -8m - 2n + p = -9 \\ -m - n + p = -1 \end{cases} \Rightarrow m = n = p = 1$

deci $f = X^3 + X^2 + X + 1$. **(1p)**

2) $X \cdot A = B$ det $A = -4 \neq 0 \Rightarrow A$ inversabilă.

Înmulțind cu A^{-1} vom avea $X = B \cdot A^{-1}$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A^* = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 9 & -16 & 1 \\ 4 & -24 & 16 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1p)}$$

3) $|x| < 1$ şi $|y| < 1 \Rightarrow |x \cdot y| < 1 \Leftrightarrow -1 < xy < 1 \Rightarrow 1 + xy > 0$.

Arătăm că $-1 < \frac{x + y}{1 + xy} < 1$.

$-1 - xy < x + y \Leftrightarrow 1 + xy + x + y > 0 \Leftrightarrow (1 + x)(1 + y) > 0$ adev. şi

$x + y < 1 + xy \Leftrightarrow 1 + xy - x - y > 0 \Leftrightarrow (1 - x)(1 - y) > 0$ adev.

deci " $*$ " este operație algebrică pe G.

$$(x * y) * z = \frac{x + y}{1 + xy} * z = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz}$$

Scanned with OKEN Scanner

$x*(y*z)=x*\dfrac{y+z}{1+yz}=\dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$ deci operația "$*$" este asociativă.

$x*e=x\Rightarrow\dfrac{x+e}{1+xe}=x\Rightarrow x+e=x+x^2\cdot e\Rightarrow e(1-x^2)=0,(\forall)\,x\in G\Rightarrow e=0.$

$x*x'=0\Rightarrow\dfrac{x+x'}{1+xx'}=0\Rightarrow x'=-x\in G.$

$y*x=\dfrac{y+x}{1+yx}=\dfrac{x+y}{1+xy}=x*y,\ (\forall)x,y\in G.$

Am utilizat proprietățile adunării şi înmulțirii numerelor reale. **(1p)**
Deci $(G,*)$ este grup comutativ.

II. 1) În $\Delta CDA(m(\hat{D})=90^\circ)\Rightarrow FD^2=FC\cdot FA$. (1)

În $\Delta ADB(m(\hat{D})=90^\circ)\Rightarrow DE^2=EB\cdot EA$. (2)

În $\Delta ABC(m(\hat{A})=90^\circ)\Rightarrow AD^2=BD\cdot DC$. (3)
$ADEF$ dreptunghi $\Rightarrow AD^2=FE^2=FD^2+DE^2\Rightarrow BD\cdot DC=FC\cdot FA+EB\cdot EA.$ **(1p)**

2) $A_{lat}=8a^2\sqrt{3}$; $V=\dfrac{13a^3\sqrt{2}}{3}$; $VO=\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

(1,5p)

III. 1) $9_{(10)}=21_{(4)}$; $57_{(10)}=321_{(4)}$. **(1,5p)**

2) $(756;450)=18$
$[756;450]=18900$.

Oficiu: (1p)

Testul Nr. 25

I. 1) $\dfrac{f(c)}{c-2}=c^3+2c^2+4c+7+\dfrac{15}{c-2}\in\mathbf{Z}\Rightarrow$
$\Rightarrow c-2\in\{\pm1,\pm3,\pm5,\pm15\}\Rightarrow c\in\{-13,-3,-1,1,3,5,7,17\}$. **(0,75p)**

2) $f(a)=\left(a^4-a^2+\dfrac{1}{4}\right)+\left(a^2-a+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2}=\left(a^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}>0$

deoarece $x^2\geq0,\ (\forall)\,x\in\mathbf{R}$. **(0,50p)**

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{2}+1<1.$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $b=\frac{1}{2}$ obținem $f(b)<1$. **(0,25p)**

II. 1) Ecuația se scrie $(2^x)^2+3\cdot 2^x-28=0$.
Notăm $2^x=t>0$ și ecuația va fi $t^2+3t-28=0$; $t_1=-7$ nu convine;
$t_2=4$ deci $2^x=2^2\Rightarrow x=2$. **(0,50p)**

2) Se impun condițiile de existență a logaritmului și a funcției:

$$x\neq -1,\ \frac{2x-1}{x+1}>0,\ \frac{2x-1}{x+1}\neq 1 \text{ și } x^2-3x+3>0;$$

$$x^2-3x+3=1\Rightarrow x^2-3x+2=0\Rightarrow x_1=1 \text{ convine, } x_2=2 \text{ nu convine.}$$

(1,25p)

III. 1) Fie $A, B\in M$, $A=\begin{pmatrix} a & a-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b & b-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $a,b\in\mathbf{R}^*$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} ab & ab-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M,$$ deoarece $a\cdot b\neq 0$, deci operația este internă.

Fie $C=\begin{pmatrix} c & c-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $c\in\mathbf{R}^*$.

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)=\begin{pmatrix} a\cdot b\cdot c & abc-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Pentru $a=1$ obținem $I_2\in M$, deci $A\cdot I_2=I_2\cdot A=A$, $(\forall)\,A\in M$.

$$A^T=\begin{pmatrix} a & 0\\ a-1 & 1\end{pmatrix};\ \det A=a\neq 0;\ A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1-a\\ 0 & a\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*=\frac{1}{a}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1-a\\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1-a}{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M.$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} ba & ba-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=A\cdot B,$$ deoarece înmulțirea numerelor reale este comutativă.

(1p)

2) Fie $f:\mathbf{R}^*\to M$, $f(a)=\begin{pmatrix} a & a-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $(\forall)a\in\mathbf{R}^*$.

Dacă $f(a)=f(b)\Rightarrow\begin{pmatrix} a & a-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & b-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow a=b$, deci f este injectivă.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $A \in M$, $A=\begin{pmatrix} a & a-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$ atunci $(\exists)\ a \in \mathbf{R}^*$ a.î. $f(a) = A$ deci f este surjectivă, deci, deci f bijecție.

$$f(a\cdot b)=\begin{pmatrix} ab & ab-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b & b-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=f(a)\cdot f(b),$$

deci f este morfism de grup.
Cum am arătat că f este bijectivă rezultă că f este izomorfism. **(0,75p)**

IV. $S_9=(10-1)+(10^2-1)+\ldots+(10^9-1)=(10+10^2+\ldots+10^9)-9=$

$$=10\,\frac{10^9-1}{10-1}-9=\frac{10^{10}-10}{9}-9=\frac{10^{10}-91}{9}.$$ **(0,75p)**

V. Se determină ultima cifră a numărului A. Făcându-se discuția în cele 4 cazuri, se obține soluția $n = 4k + 2$, $k \in \mathbf{N}$. **(0,75p)**

VI. 1) $A_l + A_b = 2\cdot bc + 2\cdot ac + ab = 122{,}9\ m^2$

$$\begin{aligned} a &= 24\,m \\ b &= 0{,}1m \\ c &= 2{,}5\,m \end{aligned}$$ **(0,25p)**

2) Fie β măsura unghiului obtuz şi α măsura unghiului ascuțit în ΔABC, $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=60$ şi $2\alpha+\beta=180^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha\cdot\beta = 3600 \\ \beta = 180-2\alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha^2-90\alpha+1800=0 \Rightarrow \alpha=30 \text{ sau } \alpha=60.$$

Deci $\alpha = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ echilateral; nu convine deoarece $\beta = m(\widehat{ABC})$ este obtuz. Deci $\alpha = 30^\circ \Rightarrow \beta = 120^\circ \Rightarrow m(\hat{A}) = 60^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{aria conului} = 15^2\cdot \sin 60^\circ = \frac{225\sqrt{3}}{2}\ cm^2.$$

Numărul de plăcuțe necesare este:

$$\left[\frac{1\,229\,000\ cm^2}{\frac{225\sqrt{3}}{2}\ cm^2}\right]+1=6\,308 \text{ plăcuțe}.$$ **(0,75p)**

3) $V = 24\cdot 0{,}1\cdot 2{,}5\ m^3 = 6\ m^3$.

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{4}{5}\cdot 2{,}5 = 2\text{m}^3$. **(0,50p)**

4) I robinet într-o oră umple $\frac{1}{2}$ m³

II robinet într-o oră umple $\frac{2}{5}$ m³.

În 2,4 ore I umple 1,2m³ şi în 1,2 ore II umple $\frac{12}{25}$ m³.

$6-\frac{42}{25}=\frac{108}{25}$ m³; Împreună cele două robinete umplu pe oră $\frac{9}{10}$ m³.

Deci timpul necesar este de 4 h 48'.

Oficiu: (1p)

Testul Nr. 26

I. 1) Fie p prim $T = p^a$ ani; $C_1 = p^b$ ani; $C_2 = p^c$ ani.

Dacă p impar ($p \geq 3$, p prim) atunci $p^c - 1 = 2 = p^b - 1 = p^a - 1$! Deci $p = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2^c - 1 = 3 \Rightarrow 2^c = 4$; $2^c - 1 = 7 \Rightarrow 2^c = 8$ şi $2^a - 1 = 31 \Rightarrow 2^a \geq 32$ deci soluția este: 32, 8, 4. **(1p)**

2) Fie x = numărul de pâini.

$$\text{I} = \frac{x}{2}+\frac{1}{2} \qquad \text{III} = \frac{x}{8}+\frac{1}{8}$$

$$\text{II} = \frac{x}{4}+\frac{1}{4} \qquad \text{IV} = \frac{x}{16}+\frac{1}{16}.$$

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} = x \Rightarrow x = 15. \quad \textbf{(1p)}$$

3) $p^2 - 1 = (p-1)\cdot(p+1)$; p prim impar $\Rightarrow p-1$ şi $p+1$ sunt pare consecutive $\Rightarrow$ $\Rightarrow 8 \mid (p^2-1)$.

p prim, $p \geq 5 \Rightarrow p = 3k+1$ sau $p = 3l+2 \Rightarrow 3 \mid p^2 - 1$;

$(8,3) = 1 \Rightarrow 24 \mid (p^2-1)$ **(1p)**

II. 1) $\frac{\hat{A}}{3a} = \frac{\hat{B}}{2a} = \frac{\hat{C}}{a} = \frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{6a} = \frac{180^\circ}{6a} = \frac{30^\circ}{a} \Rightarrow \hat{C} = 30^\circ,\ \hat{B} = 60^\circ,\ \hat{A} = 90^\circ$;

$m_a = \frac{a}{2} = m \Rightarrow a = 2m$; $c = m$; $b = \sqrt{3}\cdot m \Rightarrow P = 3m + \sqrt{3}\cdot m$; $S = \frac{m^2\cdot\sqrt{3}}{2}$.

(1,5p)

Scanned with OKEN Scanner

2) Aplicăm teorema proiecției:

Aria bazei = Aria secțiunii · cos 30° $\Leftrightarrow \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} = 96\sqrt{3} \Rightarrow a = 8$. **(1,5p)**

III. 1) $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$; $A \cap B = \{18, 36, 45, 72, 90\}$
$C = \{0, 36\} \Rightarrow (A \cap B) \cup C = \{0, 18, 36, 45, 72, 90\}$. **(1,5p)**
2) Se arată că operațiile de adunare şi înmulțire sunt interne în mulțimea A.
Se verifică simplu axiomele inelului. **(1,5p)**
Oficiu: (1p)

Testul Nr. 27

I. 1) a) $x_V = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow x_V = \frac{-2(m+1)}{2m} = \frac{-m-1}{m} = -1-\frac{1}{m}$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4m(m+2)-4(m+1)^2}{4m} =$$

$$= \frac{m^2+2m-m^2-2m-1}{m} = -\frac{1}{m}.$$

Locul geometric se află eliminând între cele două relații parametrul m.
$x_V = -1 + y_V; x = -1 + y \Leftrightarrow y = x + 1$. **(0,5p)**

b) $f_m(x) = m(x+1)^2 + 2x + 2$
$f_m(-1) = 0 \Rightarrow A(-1, 0)$ este punct fix **(0,5p)**

2) $x_{n+1} = 2(n+1) - 5 = 2n - 3$

$x_{n+1} - x_n = 2n - 3 - 2n + 5 = 2$, $(\forall) n \geq 1 \Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ este un şir ce formează o progresie aritmetică.
$x_1 = -3$; $r = 2$. **(1p)**

3) $H = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

*	1	2	3	4	6	12
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2	4
6	1	2	3	2	6	6
12	1	2	3	4	6	12

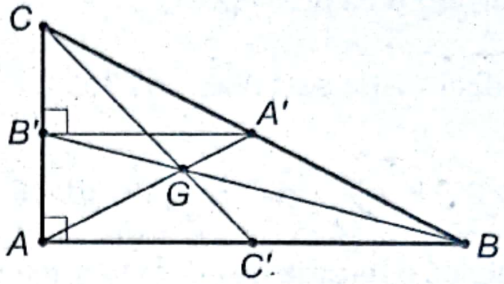
Din studiul tablei rezultă că H este parte stabilă a lui **N** în raport cu operația "$*$". **(1p)**

Scanned with OKEN Scanner

II. 1) a) $AB = 6\sqrt{2}$

$AC = 6$

$BC = 6\sqrt{3}$



(0,5p)

$AA' = \frac{BC}{2} = 3\sqrt{3}$

$BB'^2 = \frac{2(AB^2 + BC^2) - AC^2}{4} = \frac{2(72+108)-36}{4} = 81 \Rightarrow BB' = 9$.

$CC'^2 = \frac{2(AC^2 + BC^2) - AB^2}{4} = \frac{2(36+108)-72}{4} = 54 \Rightarrow CC' = 3\sqrt{6}$.

(0,5p)

b) $A'B' = 3\sqrt{2}$; $CE = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$; $CG \cdot A'B' = 12\sqrt{3}$.

$A'C \cdot GB' + A'G \cdot CB' = 3\sqrt{3} \cdot 3 + \sqrt{3} \cdot 3 = 12\sqrt{3}$.

Aplicând reciproca teoremei lui Ptolemeu rezultă că patrulaterul $GA'CB'$ este inscriptibil.

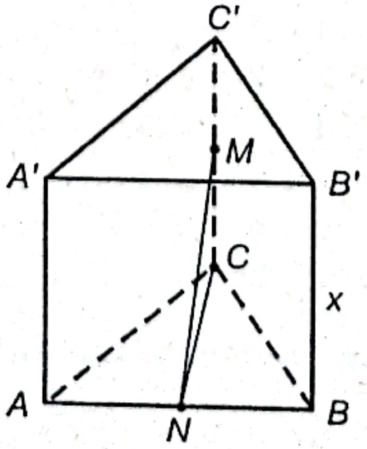
$\Delta CB'A'$ este dreptunghic în $B' \Rightarrow r = \frac{A'C}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. **(0,5p)**

2) $AB = a$. Fie $BB' = x$ şi N mijlocul lui AB, $CC' \perp (ABC) \Rightarrow m(\widehat{MCN}) = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\widehat{CNM}) = 45°$.

ΔMCN este dreptunghic isoscel $\Rightarrow CN = MC \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = a\sqrt{3}$.

$A_t = \frac{7a^2\sqrt{3}}{2}$; $V = \frac{3a^2}{4}$. **(1p)**



III. 1) Aplicăm teorema împărțirii cu rest

$n = 10 \cdot q + q,\ 0 \le q \le 9 \Rightarrow n \in \{0, 11, 22, 33, 44, ..., 99\}$ **(1p)**

2) Fie x numărul:

$$4x = 160 + \frac{2}{3}x \Leftrightarrow 10x = 3 \cdot 160 \Rightarrow x = 48\,.$$ **(1p)**

3) 1m stambă costă 1000 lei;
1m finet costă 1400 lei;
1m stofă costă 7200 lei;
11m stofă, 12 m finet şi 13 m stofă costă 121.400 lei. **(1,5p)**

Oficiu: (1p)

Testul Nr. 28

I. 1) $x = 4 - \frac{8}{n+2} \in \mathbf{N}^* \Rightarrow n+2 \mid 8 \Rightarrow n+2 \in \{1, 2, 4, 8\} \Rightarrow n \in \{0, 2, 6\}$.

Pentru $n = 0 \Rightarrow x = 0 \notin \mathbf{N}^*$.
Pentru $n = 2 \Rightarrow x = 2$.
Pentru $n = 6 \Rightarrow x = 3$, deci $A = \{2, 3\}$.
Dacă $2 \in B \Rightarrow m = 0$.
Dacă $3 \in B \Rightarrow m = 3$.
Pentru ca $A \cap B \neq \varnothing$ trebuie ca $m \in \{0, 3\}$. **(1p)**

2) Ecuația se scrie:

$$3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 3^{2x} = 5 \cdot 2^x \cdot 3^x \mid :3^{2x} \Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 2 = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

Notăm $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $y > 0$. Ecuația devine:

$$3y^2 - 5y + 2 = 0;\ y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6} \Rightarrow y_1 = 1,\ y_2 = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0;\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 1.$$ **(1p)**

3) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0&1&-1\\5&-2&2\\2&3&-2\end{vmatrix}=-5\Rightarrow x_1=1;\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1&0&-1\\3&5&2\\2&2&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\3&5&5\\2&2&0\end{vmatrix}=-10\Rightarrow x_2=2;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&0\\3&-2&5\\2&3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\3&-5&5\\2&1&2\end{vmatrix}=-15\Rightarrow x_3=3. \qquad \textbf{(1p)}$$

II. 1) $[DE]$ mediană relativă ipotenuzei $\Rightarrow [DE]\equiv[AE]\Rightarrow \Delta EDA$ isoscel $\Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{EDA}\equiv\widehat{EAD}$ (1)

$[DF]$ mediană relativă ipotenuzei $\Rightarrow [DF]\equiv[FA]\Rightarrow \Delta FDA$ isoscel $\Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{FDA}\equiv\widehat{FAD}$ (2)

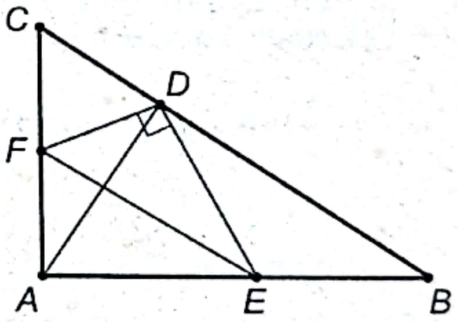
Din (1) şi (2) rezultă că

$$m(\widehat{FDE})=m(\widehat{FDA})+m(\widehat{ADE})=m(\widehat{FAD})+m(\widehat{DAE})=90^\circ.$$

Din

$$m(\widehat{FAE})+m(\widehat{FDE})=90^\circ+90^\circ=180^\circ\Rightarrow AEDF \text{ este patrulater inscriptibil.}$$

FE linie mijlocie în $\Delta ABC\Rightarrow FE\parallel BC$ şi cum $AD\perp BC\Rightarrow AD\perp EF$. Centrul cercului circumscris patrulaterului este mijlocul diagonalei FE.. **(1p)**



2) a) $A_l=4\cdot a\cdot AA'=8a^2\Rightarrow AA'=2a$

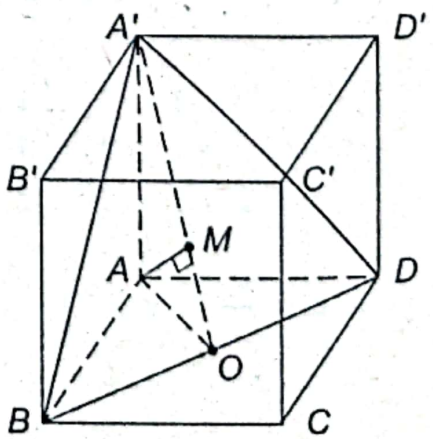
$$A_b=2\cdot S_{DCA}=2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2};\qquad V=A_b\cdot h=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}2a=a^3\sqrt{3}.$$

b) $A'B=A'D=a\sqrt{5}$

$$\left.\begin{matrix}A'A\perp(ABCD)\\AO\perp BD\end{matrix}\right|\Rightarrow A'O\perp BD;\ DO=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicăm teorema lui Pitagora în $\Delta A'OD$

$$\Rightarrow A'O=\sqrt{A'D^2-OD^2}=\frac{a\sqrt{17}}{2}$$



$$S_{A'BD} = \frac{A'O \cdot BD}{2} = \frac{a^2\sqrt{51}}{4}.$$

c) Fie $AM \perp A'O$.

$$\left.\begin{matrix} BD \perp A'A \\ BD \perp AO \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (A'AO) \Rightarrow \left.\begin{matrix} BD \perp AM \\ A'O \perp AM \end{matrix}\right\} \Rightarrow AM \perp (A'BD).$$

$$OA = \frac{a}{2},\ AM = \frac{AA' \cdot AO}{A'O} = \frac{2\sqrt{17}\,a}{17}. \qquad \textbf{(1,5p)}$$

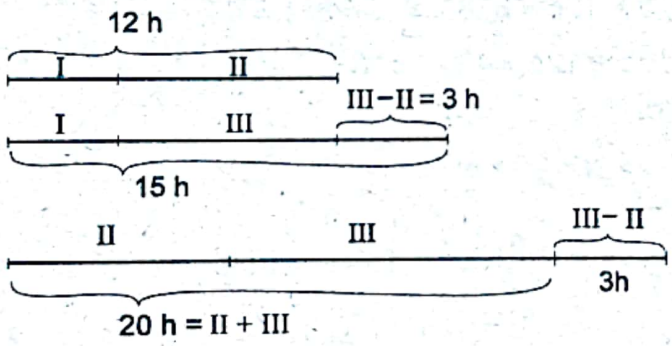
III. 1) Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{80}$ cele 80 de numere.

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{80}}{80} = 47{,}5; \qquad x_1 = 101,\ x_2 = 33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3 + x_4 + \ldots + x_{80} = 3666 \Rightarrow \frac{x_3 + x_4 + \ldots + x_{80}}{78} = 47. \qquad \textbf{(1p)}$$

2) $\left.\begin{matrix} a - b = 57 \\ a = b \cdot 3 + 13 \\ b \geq 14 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b + 57 = 3b + 13 \Rightarrow b = 22 \Rightarrow a = 79$ **(1p)**

3)



III = 60 h
II = 30 h
I = 20 h. **(1,5p)**

Oficiu:(1p)

Testul Nr. 29

I. 1) a) $P(-1) = 0 \Rightarrow -1 + 2 - 3 + a = 0 \Rightarrow a = 2.$ **(1p)**

b) Aplicăm schema lui Horner:

	1	2	3	2
−1	1	1	2	0

$Q(x) = x^2 + x + 2.$ **(1p)**

c) $Q(x)=x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0;(\forall)\,x\in\mathbf{R}$. (1p)

2) $\det A=6-6=0$. Fie $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, A verifică ecuația caracteristică:

$A^2-(a+d)A+(\det A)\cdot I_2=0\Rightarrow A^2=(a+d)A;\ A^3=(a+d)^2A.$

Prin inducție se arată că:

$A^n=(a+d)^{n-1}\cdot A.$

În cazul nostru:

$$A^n=7^{n-1}\cdot\begin{pmatrix}6 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$ (1p)

II. a) $\frac{1}{n}<\frac{11-\sqrt{105}}{2}\Leftrightarrow n>\frac{2}{11-\sqrt{105}}=\frac{2(11+\sqrt{105})}{16}$

$n>\frac{11+\sqrt{105}}{8}\Rightarrow n\geq 3$. Deci $n=3$. (1p)

b) $111a+210b+12c=900\Rightarrow a=$ par.

Dacă $a=2\Rightarrow 210b+12c=678\ \Rightarrow\ b=3,\ c=4.$

Dacă $a=4\ \Rightarrow\ 210b+12c=456\ \Rightarrow\ b=2,\ c=3$!

deoarece $a<b<c$. (1p)

c) $3m$ ... $1l$ ..... $8z$
$3m$ ... $2{,}5l$ ... xz $\Rightarrow\ x=20$ zile

$3m$ ... $2{,}5l$ ... $20z$
ym ... $2{,}5l$ ..... $6z$ $\Rightarrow\ \frac{3}{y}=\frac{6}{20}\Rightarrow y=10$ muncitori. (1p)

III. Fie $VO\perp(ABC)$.

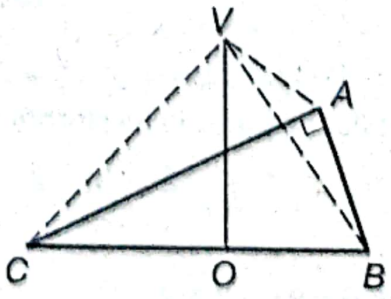
$AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=8$ cm. $VA=VB=VC\Rightarrow O$ centrul cercului circumscris ΔABC, deci este mijlocul ipotenuzei $[BC]$.

$OC=5$; În ΔVOC aplicăm teorema lui Pitagora:

$VO=\sqrt{VC^2-OC^2}=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12$ cm

$A_b=\frac{6\cdot 8}{2}=24\text{cm}^2;$

$V=\frac{A_b\cdot h}{3}=\frac{24\cdot 12}{3}=96\text{cm}^3.$ (2p)



Scanned with OKEN Scanner

Testul Nr. 30

I. 1) $k \vdots 36 \Leftrightarrow k \vdots 9$ şi $k \vdots 4$.
$k \vdots 4 \Leftrightarrow c \in \{0, 4, 8\}$.
$k \vdots 9 \Leftrightarrow (a+b+c+16) \vdots 9 \Leftrightarrow a+b+c \in \{2, 11, 20\} \Rightarrow E \in \{19, 604, 1999\}$. **(1p)**

2) $b+c \vdots 9$ şi $c \in \{0, 4, 8\} \Rightarrow (0, 0), (9, 0), (5, 4), (1, 8)$. **(1p)**

3) Nr. de bănci = 19
Nr. de fete = 25
Nr. de băieţi = 23. **(2p)**

II. 1) Aplicăm relaţiile lui Viète:

$$x_1 + x_2 = \frac{2-m}{2};\ x_1 \cdot x_2 = 2.$$

Relaţia dată se va scrie:

$$2(x_1+x_2) + x_2 + x_1 \cdot x_2 = 8 - m \Rightarrow 2 - m + x_2 + 2 = 8 - m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = 4,\ x_1 = \frac{1}{2},\ m = -7.$$ **(1p)**

2) $G = \{1, -1, i, -i\}$
"$\cdot$" este operaţie algebrică pe G
"$\cdot$" este asociativă deoarece $G \subset \mathbf{C}$
1 este element neutru

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

$1^{-1} = 1,\ (-1)^{-1} = -1,\ i^{-1} = -i,\ (-i)^{-1} = i$

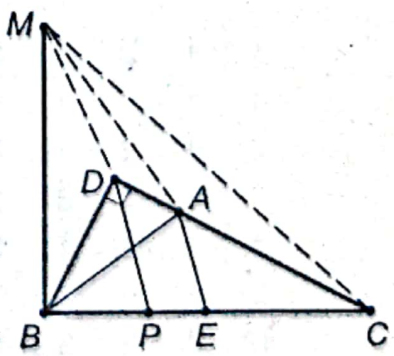
deci $(G, \cdot)$ este grup comutativ. (Comutativitatea rezultă din simetria tablei faţă de diagonala principală sau din faptul că $G \subset \mathbf{C}$). **(1p)**

III. a) $\cos A < 0 \Rightarrow \widehat{A}$ obtuz. $AE \perp BC$; $CE = 4$;
$AC = 5 \Rightarrow AE = 3$.

$$S = \frac{BC \cdot AE}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12 = \frac{AC \cdot BD}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24 = 5 \cdot BD \Rightarrow BD = \frac{24}{5}.$$

$$\left.\begin{array}{l} MB \perp (ABC) \\ BD \perp AC \end{array}\right\} \overset{T3\perp}{\Rightarrow} MD \perp AC;\ MD = 5.$$ **(1p)**



Scanned with OKEN Scanner

b) $CD=\frac{32}{5}$, $\sin C=\frac{BD}{BC}=\frac{3}{5}=\frac{DP}{\frac{32}{5}}\Rightarrow DP=\frac{96}{25}$.

$PC=\frac{128}{25}$, $PB=\frac{72}{25}\Rightarrow\frac{PC}{PB}=\frac{16}{9}$. (1p)

c) $V=A_b\cdot h=\frac{BC\cdot AE}{2}\cdot MB=12\cdot\frac{7}{5}\text{ cm}^3=\frac{84}{5}\text{ cm}^3$.

$A_t=2S_{ABC}+A_l=24+8\cdot\frac{7}{5}+5\cdot\frac{7}{5}+5\cdot\frac{7}{5}=$

$=24+\frac{56}{5}+14=38+\frac{56}{5}=\frac{190+56}{5}=\frac{246}{5}\text{ cm}^3$. (1p)

Oficiu: (1p)

Testul Nr. 31

I. a) Cum $\frac{3}{2}\notin\mathbf{Z}$, nu putem calcula $5*\frac{3}{2}$. **(0,5p)**

b) $y*x=y+x-1=x+y-1=x*y$, $(\forall)\,x,y\in\mathbf{Z}$
adică operația este comutativă.
Fie $x,y,z\in\mathbf{Z}$.
$(x*y)*z=(x+y-1)*z=x+y-1+z-1=x+y+z-2$.
$x*(y*z)=x*(y+z-1)=x+y+z-1-1=x+y+z-2$.
deci operația "$*$" este asociativă. **(1p)**

c) $x*e=x\Leftrightarrow x+e-1=x\Rightarrow e=1$. **(0,5p)**

d) $x*x'=1$, $x+x'-1=1\Rightarrow x'=2-x\in\mathbf{Z}$. **(0,5p)**

e) $x*2=-4\Leftrightarrow x+2-1=-4\Rightarrow x=-5$
$x^2*x=1\Leftrightarrow x^2+x-1=1\Leftrightarrow x^2+x-2=0$
$x_1=1\in\mathbf{Z}$, $x_2=-2\in\mathbf{Z}$. **(0,5p)**

II. $H=\{1,2,3,4,6,12\}$

$\perp$	1	2	3	4	6	12
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2	4
6	1	2	3	2	6	6
12	1	2	3	4	6	12

T	1	2	3	4	6	12
1	1	2	3	4	6	12
2	2	2	6	4	6	12
3	3	6	3	12	6	12
4	4	4	12	4	12	12
6	6	6	6	12	6	12
12	12	12	12	12	12	12

(1p)

Scanned with OKEN Scanner

III. a) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$. (1p)

b) $\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx =$

$= -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C =$

$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$. (1p)

c) $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + C = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$. (1p)

d) $\int \sqrt{x^2-4}\,dx = \int \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,x dx - 4\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx =$

$= x\sqrt{x^2-4} - \int \sqrt{x^2-4}\,dx - 4\ln|x+\sqrt{x^2-4}| + C \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \sqrt{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - 2\ln(x+\sqrt{x^2-4}) + C$. (1p)

IV. $A = \int_{-2}^{1} (-x^2+2-x)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$. (1p)

Oficiu: (1p)

Testul Nr. 32

I. a) $5 * 3 = 5\cdot 3 - 5 - 3 + 2 = 9$ (0,5p)

b) $y * x = y\cdot x - y - x + 2 = x\cdot y - x - y + 2 = x * y$, $(\forall)\, x, y \in \mathbf{R}$;

Fie $x, y, z \in \mathbf{R}$:

$(x * y) * z = (x\cdot y - x - y + 2) * z = xyz - x\cdot z - y\cdot z + 2z -$

$- xy + x + y - 2 - z + 2 = x\,y\,z - xy - yz - zx + x + y + z.$

$x * (y * z) = x * (yz - y - z + 2) = xyz - xy - xz + 2x -$

$- x - yz + y + z - 2 + 2 = x\cdot y\cdot z - xy - yz - zx + x + y + z.$

Deci operația "$*$" este asociativă. (1p)

c) Stabilim existența elementului neutru e.

$x * e = x$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow x\cdot e - x - e + 2 = x \Leftrightarrow x(e-2) - (e-2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (e-2)(x-1) = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow e = 2$.

$x * x' = 2 \Leftrightarrow x\cdot x' - x - x' + 2 = 2 \Rightarrow x'(x-1) = x$;

Pentru $x \in \mathbf{R} - \{1\}$ $(\exists)\, x' \in \mathbf{R} - \{1\}$.

$x' = \frac{x}{x-1}$ care este simetricul elementului x. (1p)

Scanned with OKEN Scanner

d) $x * 2 = -4 \Leftrightarrow 2x - x - 2 + 2 = -4 \Rightarrow x = -4.$

$(x * 5) * 3 = 8x - 7$

$x * x = x^2 - 2x + 2$

Ecuația devine:

$x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 9.$ (0,5p)

II. $A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$A^2 + A + I_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2.$$

Cum $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A \Rightarrow A^3 - I_2 = (A - I_2)(A^2 + A + I_2) = (A - I_2) \cdot O_2 = O_2 \Rightarrow A^3 = I_2,$ sau prin calcul direct. (1p)

III. a) $\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$ (1p)

b) $\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$ (1p)

c) $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$ (1p)

d) $\int \sqrt{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} x\, dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx =$

$= \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} x\, dx + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}\, dx +$

$+ \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \mathbf{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \sqrt{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$ (1p)

IV. $A = \int_{-2}^{1} (3 - x - x^2 - 1) dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$ (1p)

Oficiu: (1p)

Scanned with OKEN Scanner

Testul Nr. 33

I. a) Fie $A, B \in M$;

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a' \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ab' \\ 0 & bb' \end{pmatrix} \in M \qquad \textbf{(1p)}$$

b) Presupunem că $(\exists)\, U \in M$ a.î. $U \cdot A = A$.

$$\begin{pmatrix} 0 & a' \\ 0 & b' \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a'b = a \\ bb' = b \end{cases} (\forall) a, b \in \mathbf{R} \Rightarrow b' = 1 \text{ şi nu există } a' \text{ !}$$

(1p)

c) $$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a\cdot\beta \\ 0 & b\cdot\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\beta = 1 \text{ şi } \alpha \in \mathbf{R} \Rightarrow V = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M,\ (\forall)\, \alpha \in \mathbf{R}. \qquad \textbf{(1p)}$$

II. a) Fie $x, y \in G \Rightarrow x * y = x + y + xy > -1 \Leftrightarrow x + y + xy + 1 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (1 + x)(1 + y) > 0$ adevărată deoarece $x > -1$ şi $y > -1$.
Fie $x, y, z \in G$; $(x * y) * z = (x + y + xy) * z = x + y + xy + z + xz + yz + xyz$.
$x * (y * z) = x * (y + z + y \cdot z) = x + y + z + yz + xy + xz + x \cdot y \cdot z$.
Deci operaţia "$*$" este asociativă.

$x * e = x \Rightarrow x + e + x \cdot e = x \Leftrightarrow e(x + 1) = 0,\ (\forall)\, x > -1 \Rightarrow e = 0$.

$$x * x' = 0 \Rightarrow x + x' + x \cdot x' = 0 \Rightarrow x' \cdot (1 + x) = -x \Rightarrow x' = \frac{-x}{1+x} \in G.$$

$y * x = y + x + y \cdot x = x + y + x \cdot y = x * y,\ (\forall)\, x, y \in G$.
Deci $(G, *)$ este grup comutativ. **(1,5p)**

b) $3 * 4 * 3 = (3 * 4) * 3 = (3 + 4 + 3 \cdot 4) * 3 = 19 * 3 = 19 + 3 + 19 \cdot 3 =$
$= 22 + 57 = 79$. **(0,5p)**

c) $x * x = x + x + x^2 = x^2 + 2x$
Ecuaţia $x * x = a \Leftrightarrow x^2 + 2x = a \Leftrightarrow x^2 + 2x - a = 0$; $\Delta = 4 + 4a = 4(1 + a)$.
Dacă $a \le -1$ ecuaţia nu are soluţii.

Dacă $a > -1 \Rightarrow \Delta > 0$ şi $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+a}$; $x_1 = -1 - \sqrt{1+a} \notin G$ **(1p)**

şi $x_2 = -1 + \sqrt{1+a} \in G$ deci ecuaţia are soluţie.

III. a) $\int x^2 \cdot e^x\, dx = x^2 \cdot e^x - 2\int x e^x\, dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$. **(1p)**

b) $$I = \int_1^e x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{4}x^2 \Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}.$$ **(1p)**

Scanned with OKEN Scanner

c) $A=\int_1^2(-x^2+3x-2)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-2x\right)\Big|_1^2=\frac{1}{6}$. (1p)

Testul Nr. 34

I. a) Fie $a, b, c \in \mathbf{Z}$.

$(a\circ b)\circ c=(a+b-ab)\circ c=a+b-ab+c-(a+b-ab)\cdot c=$
$=a+b+c-ab-ac-bc+a\cdot b\cdot c.$

$a\circ(b\circ c)=a\circ(b+c-bc)=a+b+c-bc-a(b+c-bc)=$
$=a+b+c-ab-bc-ac+abc.$

Deci "$\circ$" este operație asociativă pe $\mathbf{Z}$.

$a\circ e=a,\ (\forall)\ a\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow a+e-a\cdot e=a\Leftrightarrow e(1-a)=0,\ (\forall)\ a\in\mathbf{Z}\Rightarrow$
$\Rightarrow e=0.$

$b\circ a=b+a-ba=a+b-ab=a\circ b,\ (\forall)\ a,b\in\mathbf{Z}$ (am folosit proprietățile operațiilor de adunare și înmulțire din $\mathbf{Z}$).

Deci $(\mathbf{Z},\circ)$ este monoid comutativ. (1p)

b) Fie $a\in\mathbf{Z}$; $a\circ a'=0\Rightarrow a+a'-a\cdot a'=0\Leftrightarrow a'(1-a)=-a$.

$a=1\in\mathbf{Z}$ nu admite simetric, deci $(\mathbf{Z},\circ)$ nu este grup. (1p)

c) $5\le a\circ 2\Leftrightarrow 5\le a+2-2a\Leftrightarrow 3\le -a\Leftrightarrow a\le -3$.

$a\circ 2\le 7\Leftrightarrow a+2-2a\le 7\Leftrightarrow -a\le 5\Leftrightarrow a\ge -5\Rightarrow a\in[-5,-3)\cap\mathbf{Z}=$
$=\{-5,-4,-3\}.$ (1p)

II. a) $U_{t_1}\cdot U_{t_2}=\begin{pmatrix}1 & t_1 & 2t_1^2+2t_1\\ 0 & 1 & 4t_1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & t_2 & 2t_2^2+2t_2\\ 0 & 1 & 4t_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1 & t_1+t_2 & 2(t_1+t_2)^2+2(t_1+t_2)\\ 0 & 1 & 4(t_1+t_2)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=U_{t_1+t_2}$. (1p)

b) $U_0=I_3$ (1p)

c) $U_t\cdot U_{-t}=U_{t-t}=I_3$. (1p)

III. $F(x)=\begin{cases}\frac{x^4}{4}-\frac{2}{x}+3\sqrt[3]{x}+k_1, & x<0\\ \frac{x^4}{4}-\frac{2}{x}+3\sqrt[3]{x}+k_2, & x>0,\end{cases}\quad k_1,k_2\in\mathbf{R}.$

$\int g(x)dx=x^2\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{2}{\ln 2}\int x\cdot 2^x dx=\frac{1}{\ln 2}\cdot x^2\cdot 2^x-\frac{2}{(\ln 2)^2}\cdot x\cdot 2^x+\frac{2}{(\ln 2)^3}\cdot 2^x+C.$

(1p)

Scanned with OKEN Scanner

IV. a) $g'(x) = \cos x$; $g'(0) = \cos 0 = 1$; $g(0) = \sin 0 = 0$.

g este derivabilă în $x = 0$ **(1p)**

Ecuația tangentei la graficul funcției g în $x = 0$ este:

$y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$.

b) $A = \int_0^{\pi/2} (x - \sin x)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi/2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$. **(1p)**

Oficiu: (1p)

Testul Nr. 35

I. a) Fie $x < 0$ şi $y < 0 \Rightarrow x + y < 0$ şi $x \cdot y > 0 \Rightarrow \frac{x \cdot y}{x + y} < 0$, adică $x * y \in \mathbf{R}_-^*$.

(2p)

b) Fie $x, y, z \in \mathbf{R}_-^*$.

$$(x * y) * z = \frac{xy}{x+y} * z = \frac{\frac{x \cdot y \cdot z}{x+y}}{\frac{x \cdot y}{x+y} + z} = \frac{x \cdot y \cdot z}{x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z}$$

$$x * (y * z) = x * \frac{yz}{y+z} = \frac{\frac{xyz}{y+z}}{x + \frac{yz}{y+z}} = \frac{xyz}{xy + xz + yz}$$

deci operația " $*$ " este asociativă. **(1,5p)**

c) $(x-5) * (x-2) = \frac{(x-5)(x-2)}{2x-7} = \frac{x^2 - 7x + 10}{2x-7}$

$(x-1) * (x-6) = \frac{(x-1)(x-6)}{2x-7} = \frac{x^2 - 7x + 6}{2x-7}$.

Cum $x < 0 \Rightarrow 2x - 7 < 0$. Inegalitatea:

$\frac{x^2 - 7x + 10}{2x-7} \le \frac{x^2 - 7x + 6}{2x-7} \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 \ge x^2 - 7x + 6 \Rightarrow x \in (-\infty, 0)$.

(1,5p)

II. $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow 1 \le \operatorname{tg} x \le \sqrt{3} \Rightarrow 2 \le 1 + \operatorname{tg} x \le 1 + \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}+1} \le \frac{1}{1+\operatorname{tg} x} \le \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{\pi}{12} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x} < \frac{\pi}{24} \Rightarrow \sqrt{3} - 1 < \frac{24}{\pi} \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x} < 1.$$ **(2p)**

Scanned with OKEN Scanner

III. f continuă pe $\mathbf{R} \Rightarrow f$ admite primitive.

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+x+k_1, & x\geq 0\\ -e^{-x}+k_2, & x<0.\end{cases}$$

F derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ şi $F'(x)=f(x)$, $(\forall)\, x\in\mathbf{R}^*$.

Determinăm o relaţie între k_2 şi k_1 pentru ca F să fie continuă în $x=0$, $k_1=k_2-1\Rightarrow k_2=k_1+1$.

$$F(x)=\begin{cases}-e^{-x}+k_1+1, & x<0\\ \frac{x^3}{3}+x+k_1, & -x\geq 0.\end{cases}$$

Din F continuă pe $\mathbf{R}$, F derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ şi $\lim\limits_{x\to 0}F'(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1\Rightarrow F$ este derivabilă în $x=0$ şi $F'(0)=1=f(0)$. Deci F este primitivă a lui f. **(2p)**

Oficiu: (1p)

Testul Nr. 36

I. 1) a) Fie $A, B\in H$, $A\cdot B=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a' & b'\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aa' & ab'+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Cum $a,\ a'\in\mathbf{R}^*\Rightarrow a\cdot a'\in\mathbf{R}^*\Rightarrow A\cdot B\in H$. **(1p)**

b) $\det A=a\neq 0\Rightarrow A$ este inversabilă în $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$.

$$A^T=\begin{pmatrix}a & 0\\ b & 1\end{pmatrix};\quad A^*=\begin{pmatrix}1 & -b\\ 0 & a\end{pmatrix};$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*=\frac{1}{a}\cdot A^*=\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & -\frac{b}{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in H \text{ deci } X=\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & -\frac{b}{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \quad \textbf{(1p)}$$

2) A inversabilă $\Leftrightarrow \det A\in U(\mathbf{Z})=\{-1, 1\}$.

$\det A=a\cdot b\in\{-1, 1\}\Rightarrow a=b=1$, $a=b=-1$, $a=+1$ şi $b=-1$; $a=-1$ şi $b=+1$.

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & c\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}-1 & c\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}1 & c\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix}-1 & c\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \quad \textbf{(1,5p)}$$

II. a) Fie $x, y\in G$; $x*y=xy+x+y>-1\Leftrightarrow (x+1)(y+1)>0$ adevărată deoarece $x>-1$ şi $y>-1$ deci operaţia " $*$ " este internă pe G.

Fie $x, y, z\in G$.

$$(x*y)*z=(x\cdot y+x+y)*z=x\cdot y\cdot z+xz+yz+xy+x+y+z$$
$$x*(y*z)=x*(y\cdot z+y+z)=x\cdot y\cdot z+xy+xz+x+yz+y+z$$

deci operaţia $*$ este asociativă.

Scanned with OKEN Scanner

$x * e = x = e * x$; $x \cdot e + x + e = x \Leftrightarrow e(x+1) = 0$, $(\forall) x \in G \Rightarrow e = 0$ element neutru.

$x * x' = 0 \Rightarrow x \cdot x' + x + x' = 0 \Rightarrow x'(x+1) = -x \Rightarrow$

$x' = \frac{-x}{x+1} \in G$ deoarece $\frac{-x}{x+1} + 1 = \frac{1}{x+1} > 0$.

Cum $y * x = y \cdot x + y + x = x \cdot y + x + y = x \cdot y$, $(\forall) x, y \in G$.

Rezultă că $(G, *)$ este grup abelian. **(1,5p)**

b) $x * 5 = 12 \Leftrightarrow 5 \cdot x + x + 5 = 12 \Leftrightarrow 6x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{6} \in G$. **(1p)**

III. $\int \left(x^2 - 2x + \frac{1}{x} - 5\right) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + \ln|x| - 5x + C$

$\int (x\sqrt{x} + 2x \cdot \sqrt[3]{x}) dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{4}{3}}) dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{6}{7} x^{\frac{7}{3}} + C;$

$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2\int x e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2\left(x \cdot e^x - e^x\right) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$ **(2p)**

IV. $A = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_1^3 + 2x^2\Big|_1^3 - 3x\Big|_1^3 =$

$= -9 + \frac{1}{3} + 18 - 2 - 9 + 3 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$. **(1p)**

Oficiu: (1p)

Testul Nr: 37

I. 1) a) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 1 \\ ad - bc = 1 \end{cases} \Rightarrow a = d = 1 \text{ sau } a = d = -1.$$

$\det A = ad - bc = 1$.

Deci $A = E$ sau $A = -E$. **(1,5p)**

Scanned with OKEN Scanner

b) $B^2=\begin{pmatrix} a & 1+a \\ 1-a & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1+a \\ 1-a & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (0,5p)

$\det B=-1$.

2) $\det A\neq 0 \Leftrightarrow ab\neq 0 \Leftrightarrow a\in \mathbf{R}^*$ şi $b\in \mathbf{R}^*$. (1p)

II. a) Fie $x, y, z\in G$.

$(x*y)*z=(x\cdot y-x-y+2)*z=xyz-xz-yz+2z+x-xy+y-2-z+2=$
$=x\cdot y\cdot z-x\cdot y-yz-zx+x+y+z$.

$x*(y*z)=x*(yz-y-z+2)=x\cdot y\cdot z-xy-xz+2x-x-yz+y+z-$
$-2+2=x\cdot y\cdot z-x\cdot y-y\cdot z-z\cdot x+x+y+z$.

Deci $*$ este operaţie asociativă.

$x*e=x,\ (\forall)\, x\in G\Leftrightarrow x\cdot e-x-e+2=x\Leftrightarrow (e-2)(x-1)=0,\ (\forall)\, x\in G\Rightarrow$
$\Rightarrow e=2$.

$x*x'=2\Leftrightarrow x\cdot x'-x-x'+2=2\Rightarrow x'\cdot(x-1)=x$

$$x'=\frac{x}{x-1}\in G.$$

$y*x=y\cdot x-y-x+2=xy-x-y+2=x*y,\ (\forall)\, x, y\in G$.

Rezultă că $(G, *)$ este grup abelian. (1,5p)

b) $2'=2$ şi $\left(\frac{1}{2}\right)'=-1$ (0,5p)

III. $$\int\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}+C=2\cdot\sqrt{x}+3\cdot\sqrt[3]{x}+C$$

$$\int(a\sin x+b\cos x)dx=-a\cos x+b\sin x=C.$$

$$f(x)=\ln x;\quad f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$g'(x)=x^2;\quad g(x)=\frac{x^3}{3}.$$

$$\int h(x)dx=\frac{x^3}{3}\cdot\ln x-\frac{1}{3}\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\cdot\ln x-\frac{x^3}{9}+C.$$ (3p)

IV. $$A=\int_2^3(-x^2+5x-6)dx=-\frac{x^3}{3}\Big|_2^3+\frac{5}{2}x^2\Big|_2^3-6x\Big|_2^3=$$

$$=-\frac{19}{3}+\frac{25}{2}-6=\frac{-38+75-36}{6}=\frac{1}{6}.$$ (1p)

Oficiu: (1p)

Scanned with OKEN Scanner

Testul Nr. 38

I. $A_2 \cdot A_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2-x \\ 0 & 3x-1 \end{pmatrix}$

$A_1 - 2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

$A_2 \cdot A_x = A_1 - 2\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 - x = -1$ şi $3x - 1 = +8 \Rightarrow x = 3$. **(2p)**

II. Fie $x, y, z \in \mathbf{Z}$.

$(x * y) * z = (x\cdot y - x - y + 2) * z = xyz - xz - yz + 2z - xy + x + y - 2 - z + 2 =$
$= x \cdot y \cdot z - x \cdot y - yz - zx + x + y + z.$

$x * (y * z) = x * (yz - y - z + 2) = x \cdot y \cdot z - xy - xz + 2x - x - yz + y + z - 2 + 2 =$
$= x \cdot y \cdot z - x \cdot y - y \cdot z - z \cdot x + x + y + z.$

Deci " $*$ " este operație asociativă.

$x * e = x,\ (\forall)\, x \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x\cdot e - x - e + 2 = x \Leftrightarrow (e-2)(x-1) = 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{Z} \Rightarrow e = 2.$

$x * x' = 2 \Leftrightarrow x \cdot x' - x - x' + 2 = 2 \Rightarrow x' \cdot (x-1) = x$

$x = 1$ nu are simetric $\Rightarrow (\mathbf{Z}, *)$ este monoid dar nu este grup. **(2p)**

III. 1) $\int f(x)\,dx = \int\left(x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x}\right)dx = \frac{x^3}{3} + 4\sqrt{x} - 4\ln x + C.$ **(1p)**

2) $\int \frac{3}{2x^2+8}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$ **(1p)**

3) $g(x) = \ln x \quad g'(x) = \frac{1}{x}$

$h'(x) = x^2 \quad h(x) = \frac{x^3}{3}.$

$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$ **(1p)**

IV. $x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2.$

$x^2 \le 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \le 0 \Leftrightarrow x \in [1, 2].$

$A = \int_1^2 (3x - 2 - x^2)dx = \frac{3}{2}x^2\Big|_1^2 - 2x\Big|_1^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{9}{2} - 2 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{2} - \frac{7}{3} = \frac{1}{6}.$ **(2p)**

Oficiu: (1p)

Scanned with OKEN Scanner

Testul Nr. 39

I. a) $f(x)=x^3$ $\quad f(0)=0$

$f'(x)=3x^2$ $\quad f'(0)=0$

$f''(x)=6x$ $\quad f''(0)=0$

$f'''(x)=6$ $\quad f'''(0)=6\neq 0.$

Punctul (0, 0) este punct de inflexiune al graficului funcției f deoarece $f''(x)<0$ pentru $x<0$ și $f''(x)>0$ pentru $x>0$; (0, 0) nu este punct de extrem.

$g(x)=x^4$ $\quad g(0)=0$

$g'(x)=4x^3$ $\quad g'(0)=0$

$g''(x)=12x^2$ $\quad g''(0)=0$

$g'''(x)=24x$ $\quad g'''(0)=0$

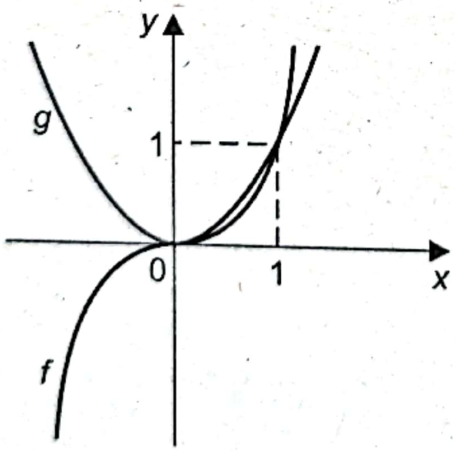
$g^{IV}(x)=24$ $\quad g^{IV}(x)=24\neq 0;\ g^{IV}(0)>0.$

Punctul (0, 0) este punct de minim pentru graficul funcției g; (0, 0) nu este punct de inflexiune. **(2p)**

b) $f'(x)>0,\ (\forall)\ x\in \mathbf{R}^*$ deci f strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

$g'(x)<0,\ (\forall)\ x\in(-\infty, 0)$ deci g este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$. **(1p)**

c)



(1p)

d) $A=\int_0^1 (x^3-x^4)\,dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1-\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}.$ **(1p)**

Scanned with OKEN Scanner

II. a) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} = (3-2)\cdot(4-2)(4-3) = 2$

fiind un determinant de tip Vandermond (sau prin calcul direct). **(1p)**

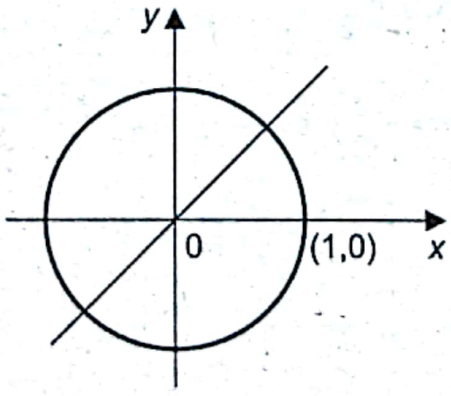
b) $\det A = \Delta \neq 2 \Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat şi soluţiile se determină cu ajutorul formulelor lui Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 5^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix}}{2} = 1.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2^2 & 5^2 & 4^2 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix}}{2} = -3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 5^2 \end{vmatrix}}{2} = 3. \qquad \textbf{(2p)}$$

III.



$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \qquad 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = y.$$

$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in C$ şi $N\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \in C$. **(1p)**

Oficiu: (1p)

Scanned with OKEN Scanner

Testul Nr. 40

I. 1) $(x * y) * z = (x + y - 3) * z = x + y - 3 + z - 3 = x + y + z - 6$;
$x * (y * z) = x * (y + z - 3) = x + y + z - 3 - 3 = x + y + z - 6$.
Deci operația " $*$ " este asociativă.

$x * e = x,\ (\forall)\, x \in \mathbf{Z} \Rightarrow x + e - 3 = x \Rightarrow e = 3$.

$x * x' = 3 \Rightarrow x + x' - 3 = 3 \Rightarrow x' = -x + 6 \in \mathbf{Z}$.

$y * x = y + x - 3 = x + y - 3 = x + y,\ (\forall)\, x, y \in \mathbf{Z}$. **(2p)**

Deci $(\mathbf{Z}, *)$ este grup comutativ.

2) $x * (-4) = 3 \Leftrightarrow x - 4 - 3 = 3 \Rightarrow x = 10$. **(0,5p)**

II. 1) $A + X = I_2 \Rightarrow X = I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. **(1,5p)**

2) $f(A) = 2 \cdot A^2 - 3 \cdot A + I_2$

$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. **(2p)**

III. 1) a) Integrăm prin părți

Notăm:

$f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$g'(x) = x \qquad g(x) = \dfrac{x^2}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int x \ln x\, dx = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{1}{2}\int x\, dx = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + C$. **(1p)**

b) $\int \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3} dx = \int \left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right) dx =$

$= x - 3\ln|x| - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + C = x - 3\ln(-x) - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + C$ **(1p)**

2) $f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 3$.

$A = \int_2^3 \left(-x^2 + 5x - 6\right) dx = -\dfrac{x^3}{3}\Big|_2^3 + \dfrac{5}{2}x^2\Big|_2^3 - 6x\Big|_2^3 = -9 + \dfrac{8}{3} + \dfrac{45}{2} - 10 - 18 + 12 = \dfrac{1}{6}$.

(1p)

Oficiu: (1p)

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III

Teste propuse pentru examenul de admitere în învățământul superior

ENUNȚURI

Test 1

(pregătitor admiterii la A.S.E.)

I. Fie $0 < b_0 < a_0$ şi $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$, $b_1 = \sqrt{a_0 \cdot b_0}$,

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2},\ b_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot b_{n-1}},\ (\forall) n \geq 1 \text{ şi } L_1 = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Stabiliți dacă:

1) a) $(a_n)_n$ este crescător; b) $(a_n)_n$ este nemajorat;
c) $(a_n)_n$ este divergent; d) $(a_n)_n$ este strict descrescător şi $(b_n)_n$ este strict crescător;
e) Toate afirmațiile precedente sunt false.

2) a) $L_1 = 0$; b) $L_2 = 0$; c) $L_1 \neq L_2$; d) $L_1 = L_2$; e) $L_1 < L_2$.

II. Se consideră funcția $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to R$, $f(x) = |\sin^3 x|$ şi $I = \int_0^{\pi/2} f(x)dx$,

atunci:

3) a) f este discontinuă în $x = 0$; b) f este nederivabilă în $x = 0$;
c) funcția f verifică ipotezele teoremei lui Rolle;
d) funcția f nu verifică ipotezele teoremei lui Rolle;
e) Toate afirmațiile precedente sunt false.

4) a) $I = 0$; b) $I = 1$; c) $I = \frac{1}{2}$; d) $I = \frac{2}{3}$; e) $I = \frac{\pi}{2}$.

III. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ şi $I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$ atunci:

5) a) f nu este derivabilă în $x = 0$; b) $f'(0) = 0$; c) $f'(0) = +\infty$;
d) $f'(0) \neq 0$; e) $f'(0) = \frac{1}{2}$.

6) a) $I = \frac{1}{3}$; b) $I = \frac{3\sqrt{2}-2}{6}$; c) $I = \frac{3\sqrt{2}-2}{6} + \frac{1}{4}\cdot \ln\frac{3}{3+2\sqrt{2}}$;
d) $I = \frac{1}{4}\ln\frac{3}{3+2\sqrt{2}}$; e) $I = \frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

IV. Se consideră sistemul: $\begin{cases} x-3y=-2 \\ x+2y=3 \\ 3x-y=a \\ 2x+y=b \end{cases}$.

7) Valorile reale a şi b pentru care sistemul este compatibil sunt:
a) $a=2$ şi $b=3$; b) $a=-2$ şi $b=3$;
c) $a\neq 2$ şi $b\neq 3$; d) $a\neq 2$ şi $b=3$;
e) Toate afirmaţiile precedente sunt false.

8) Pentru valorile a şi b reale pentru care sistemul dat este compatibil soluţiile sunt:
a) $x=1$ şi $y=1$; b) $x=0$, $y=-1$; c) $x=-1$, $y=1$;
d) $x=1$ şi $y=0$; e) $x=2$ şi $y=0$.

V. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to \mathbf{R}$, $f(x)=x^5$ şi fie

$$A=\left(\frac{a+3}{2}\right)^5,\ B=\frac{a^5+243}{2}$$ atunci:

9) $f^{(n)}(x)=0$, $(\forall)n\geq 5$; b) $f^{(n)}(x)\neq 0$, $(\forall)n\geq 6$;
c) $f^{(n)}(x)=0$, $(\forall)n\geq 6$; d) $f''(x)\leq 0$, $(\forall)x>0$;
e) Nici o afirmaţie precedentă nu este adevărată.

10) a) $(\exists)a>0$ a.î. $A>B$; b) $(\forall)a>0$ avem $A>B$;
c) $(\forall)a>0$ avem $A\leq B$; d) $(\forall)a>0$ avem $A=B$;
e) Toate afirmaţiile precedente sunt false.

VI. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=8^x+3\cdot 2^{x+1}$, atunci inegalitatea $f(x)<7$ are în $\mathbf{Z}$:

11) a) o unică soluţie; b) exact 3 soluţii;
c) numai un număr finit de soluţii; d) o infinitate de soluţii;
e) Nici o soluţie.

12) a) $(\exists)x\in\mathbf{R}$ a.î. $f'(x)<0$; b) $(\forall)x\in\mathbf{R}$ avem $f'(x)<0$;
c) $(\exists)a<b$ a.î. $f'(x)=0$, $(\forall)x\in(a,b)$;
d) $f'(x)\geq 0$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$; e) Toate afirmaţiile precedente sunt false.

VII. Se consideră mulţimea: $A=\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,\log_3(4-\sin 3x)\leq\cos\frac{12x}{5}\right\}$.

Atunci:

Scanned with OKEN Scanner

13) a) $A = \emptyset$; b) A are un unic element;
c) $A \cap [0, 4\pi] = \emptyset$; d) $A \cap [0, \pi]$ are doar 2 elemente;
e) Toate afirmațiile precedente sunt false.

14) a) $A = \left\{ \frac{5\pi}{6} + \frac{10k\pi}{3} \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$; b) $A = \left\{ \frac{5\pi}{6} \right\}$;

c) $A = \left\{ \frac{5\pi}{6} + \frac{5k\pi}{4} \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$; d) $A = \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$;

e) $A = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$.

VIII. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$ şi funcția $f: S_5 \to S_5$, $f(x) = \sigma \cdot x$, $(\forall) x \in S_5$.

15) Atunci ecuația $x^2 = \sigma$ are în S_5:
a) 2 soluții; b) 4 soluții; c) 3 soluții; d) nici o soluție; e) o soluție.

16) a) f este injectivă şi nu e surjectivă;
b) f nu este injectivă; c) f nu este injectivă şi nici surjectivă;
d) f este surjectivă dar nu este injectivă; e) f este bijectivă.

Test 2

(pregătitor admiterii la A.S.E.)

I. 1) Fie o funcție $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încât $(f \circ f)(x) = -x^3$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. Atunci:

a) f este injectivă; b) f nu este injectivă; c) f nu este surjectivă;
d) f este strict monotonă; e) $f(0) \neq 0$.

2) Fie $a, b, c \in \mathbf{Z}$ numere impare, atunci ecuația
$ax^2 + bx + c = 0$.
a) are soluții întregi; b) are soluții raționale;
c) are soluții complexe nereale; d) are soluții naturale;
e) nu are soluții raționale.

Scanned with OKEN Scanner

II. 3) Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ un polinom ce verifică condițiile:
$X \cdot P(X-1) = (X-4) \cdot P(X)$ şi $P(4) \neq 0$.
Atunci:
a) grad $P = 2$; b) grad $P = 4$; c) grad $P \geq 6$;
d) $P(1) \neq 0$; e) $(\exists)k \in \mathbf{Z}$ a.î. 24 nu divide $P(k)$.

4) Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ dat prin $a_0 = a_1 = 1$ şi $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot a_{n-k} = 2^n \cdot a_n$,
$(\forall)n \geq 2$. Atunci:
a) $a_n = 1$, $(\forall)n \geq 0$; b) $a_n = \frac{1}{(n-1)!}$, $(\forall)n \geq 1$; c) $a_n = \frac{1}{n!}$, $(\forall)n \geq 0$;
d) $a_n = n$, $(\forall)n \geq 1$; e) $a_n = \frac{1}{(n+1)!}$, $(\forall)n \geq 0$.

III. 5) Dacă $B = \{A \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R}) \mid A \cdot X = X \cdot A, (\forall)X \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})\}$, atunci:
a) $B = \{I_2\}$; b) $B = \{I_2, -I_2\}$; c) $B \neq \varnothing$;
d) $B = \{A \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R}) \mid \det A \neq 0\}$; e) $B = \{\alpha \cdot I_2 \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$.

6) Mulțimea funcțiilor injective $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ce au proprietatea că
$|f(n+1) - f(n)| \leq 1$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$.
a) este vidă; b) este finită; c) este infinită;
d) are 2 elemente; e) are un singur element.

IV. 7) Se consideră polinomul $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ atunci:
a) f este ireductibil în $\mathbf{R}[X]$; b) f este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$;
c) f este ireductibil în $\mathbf{C}[X]$; d) f este reductibil în $\mathbf{Q}[X]$;
e) f este reductibil în $\mathbf{Z}[X]$.

8) Fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{C}$ rădăcinile ecuației $x^3 - x - 1 = 0$ şi
$S_4 = x_1^4 x_2^4 + x_2^4 x_3^4 + x_3^4 \cdot x_1^4$, atunci:
a) $S_4 = 0$; b) $S_4 = -1$; c) $S_4 = -3$; d) $S_4 = 1$; e) $S_4 = 2$.

V. 9) Fie $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_6)$ atunci A^{24} este:

a) $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{4} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix}$.

Scanned with OKEN Scanner

10) Numărul termenilor iraționali din dezvoltarea $(\sqrt[4]{3}+\sqrt[6]{5})^{200}$ este:

a) 184; b) 192; c) 191; d) 183; e) 201.

VI. **11)** Se consideră mulțimea $A=\{\sqrt[n]{n}\,|\,n\in\mathbf{N}, n\geq 2\}$ atunci:

a) A este nemărginită; b) $\sup A = +\infty$;

c) $\sup A + \inf A = 1+\sqrt[3]{3}$; d) $\sup A = e$; e) $\inf A = \sqrt{2}$.

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt[3]{x+1}-\sin\sqrt[3]{x})$

a) nu există; b) există şi este zero; c) există şi este nenulă;

d) există şi este egală cu 1; e) există şi este $\frac{1}{2}$.

VII. **13)** Se consideră funcția $g:[-1,1]\to\mathbf{R}$, $g(x)=\sqrt{|x|}$ atunci $g'(0)$:

a) nu există; b) este 0; c) este 1; d) este –1; e) este $\frac{1}{2}$.

14) Pentru funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3\cdot e^{-x}$.

notăm $l=\lim\limits_{n\to+\infty} f^{(n)}(n)$, atunci:

a) $l=+\infty$; b) $l=0$; c) $l=1$; d) $l=\frac{1}{2}$; e) $l=\frac{1}{3}$.

VIII. **15)** Se consideră şirul $x_n=\left(1+\frac{\cos n\pi}{n}\right)^n$, $(\forall)\,n\geq 1$ atunci:

a) $(x_n)_n$ nemărginit; b) $(x_n)_n$ convergent; c) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = e$;

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{e}$; e) $(x_n)_n$ divergent.

16) Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel $x_1=1$ şi $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{n^2}$,

$(\forall)\,n\geq 1$ atunci:

a) $(x_n)_n$ divergent; b) $(x_n)_{n\geq 1}$ nemonoton;

Scanned with OKEN Scanner

c) $(x_n)_{n\geq 1}$ nemărginit; d) $(x_n)_{n\geq 1}$ convergent şi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$;

e) $(x_n)_{n\geq 1}$ convergent şi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{\pi^2+6}{6}$.

IX. 17) Fie $a > 1$ şi $x_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k+5}{ak+1}$, $(\forall) n \geq 1$ atunci:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$; c) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ln a$;

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$; e) $(x_n)_{n\geq 1}$, divergent.

18) Dacă $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{1}{i+j}$ atunci:

a) $l = 2 \ln 2$; b) $l = \ln 2$; c) $l = 2$; d) $l = 0$; e) $l = 1$.

X. 19) Fie $f : (a, b] \to \mathbf{R}^*$ o funcție integrabilă astfel încât $f(a) = 0$ şi $\int_a^b f(x)dx = 0$ atunci:

a) f continuă pe $[a, b]$; b) f discontinuă pe $[a, b]$;
c) f derivabilă pe $[a, b]$; d) f uniform continuă pe $[a, b]$;
e) f este indefinit derivabilă pe $[a, b]$.

20) Limita $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt$

a) este infinită; b) este 0; c) nu există; d) este finită; e) este 3.

Test 3

(pregătitor admiterii la A.S.E.)

I. 1) În $\mathbf{C}$ inecuația $z^2 - z \leq 0$ are soluția:

a) $z = x \in [0, 1]$; b) $z = \dfrac{1}{2} + iy$, $y \in \mathbf{R}$;

c) $z \in \{0, 1\}$; d) $z = x \in [0, 1]$ sau $z = \dfrac{1}{2} + iy$, $y \in \mathbf{R}$;

e) Nici una dintre afirmațiile precedente nu este adevărată.

Scanned with OKEN Scanner

2) Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale ecuației $x^3 - x - 5 = 0$ și $P(X) = X^5 - 5X^4 + 24X^3 + 3X + 8$, $\alpha = P(x_1) + P(x_2) + P(x_3)$ atunci:
a) $\alpha = 399$; b) $\alpha = 402$; c) $\alpha = 396$; d) $\alpha = 0$; e) $\alpha = 3$.

II. **3)** Se consideră ecuația $x^2 - (m-1)x + m^2 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2. Valorile $m \in \mathbf{R}$ pentru care $|x_1| = |x_2|$ sunt:

a) $\left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$; b) $\{1\}$; c) $(-\infty,-1)\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$; d) $\left\{-1,1,\frac{1}{3}\right\}$; e) $\mathbf{R}$.

4) Fie $G = \left\{ A \in \mathbf{M}_3(\mathbf{R}) \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R} \right\}$ atunci:

a) $(G, +)$ este grup necomutativ; b) $(G, \cdot)$ este grup comutativ;
c) Grupul $(G, \cdot)$ este izomorf cu $(\mathbf{R}^*, \cdot)$;
d) $(G, \cdot)$ este monoid și nu este grup; e) $(G, +, \cdot)$ este inel.

III. **5)** Ecuația $8^x \cdot (3x + 4) = 4$ are:
a) 2 soluții; b) o unică soluție; c) are 3 soluții; d) nu are soluții;
e) nici una dintre afirmațiile precedente nu este adevărată.

6) Ecuația $x \cdot \sqrt{x+2} + \sqrt{14 - 2x} = 3\sqrt{x^2 + 2}$ are:
a) 3 soluții; b) soluția unică $x = 1$; c) două soluții;
d) 4 soluții; e) nu are soluții

IV. **7)** Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu $a_1 > 0$ și rația $r > 0$ pentru $S_n = \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n}$ avem:

a) $S_n = \frac{1}{r}$; b) $S_n = \frac{n}{a_1 \cdot a_n}$; c) $S_n = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n}$;

d) $S_n = \frac{n+1}{a_1 \cdot a_n}$; e) $S_n = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_{n-1}}$.

8) Știind că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, valoarea determinantului $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ este:

a) $d = 5$; b) $d = 18$; c) $d = -18$; d) $d = 0$; e) $d = 10$.

Scanned with OKEN Scanner

V. **9)** Dacă N este numărul de numere de 6 cifre distincte ce se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5 atunci:

a) $N = 720$; b) $N = 600$; c) $N = 620$; d) $N = 840$; e) $N = 500$.

10) Valorile lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$ este inversabilă pentru $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$ sunt:

a) $m \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$; b) $m \neq 1$; c) $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$;

d) $m \in (2, +\infty)$; e) $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$.

VI. 11) Fie $I = \lim\limits_{n \to +\infty} [e^n - (2{,}72)^n]$ atunci:

a) $I = 0$; b) $I = +\infty$; c) $I = -\infty$; d) $I = 1$; e) $I = \frac{1}{e}$.

12) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ prin

$$f(x) = \begin{cases} (1 + \sin 3x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ e^3, & x = 0 \end{cases}$$ şi $I = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$ atunci:

a) $I = e^3$; b) $I = 0$; c) $I = e$; d) $I = \frac{1}{e}$; e) $I = 1$.

VII. 13) Fie $\alpha = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \cdot \ln x$ atunci

a) $\alpha = 0$; b) $\alpha = -\infty$; c) $\alpha = +\infty$; d) $\alpha = 1$; e) $\alpha = e$.

14) Fie $a > 0$ fixat şi $I = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \cdot (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a})$ atunci:

a) $I = +\infty$; b) $I = 0$; c) $I = 1$; d) $I = \ln a$; e) $I = \sqrt{a}$.

VIII. 15) Limita $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3^n + 4^n}{2^n + 4^n} \cdot \sin \frac{n\pi}{4}$

a) nu există; b) există şi este 1; c) există şi este 0;
d) există şi este (–1); e) există şi este $+\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

16) Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbf{Q} \\ x, & x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$.

Notăm $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \text{ este punct de continuitate al lui } f\}$ atunci:

a) $A = \mathbf{R}$; b) $A = [-1, 1]$; c) $A = \{0\}$;

d) $A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; e) $A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

IX. 17) Valoarea lui $a \in \mathbf{R}$ pentru care $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2}$ este:

a) $a = \frac{1}{2}$; b) $a = 1$; c) $a = 0$; d) $a = \frac{2}{3}$; e) $a = -1$.

18) Definim şirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, $f_1(x) = 1$, $f_{n+1}(x) = \int_1^x f_n(t)dt$,

$(\forall) n \in \mathbf{N}^*$ şi $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} f_{n+1}(2)$ atunci:

a) $\alpha = 1$; b) $\alpha = \frac{1}{2}$; c) $\alpha = 0$; d) $\alpha = +\infty$; e) $\alpha = 2$.

X. 19) Dacă $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = I$, unde $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+2} dx$, atunci:

a) $I = 1$; b) $I = 0$; c) $I = \frac{1}{2}$; d) $I = +\infty$; e) $I = 2$.

20) Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{axe^{nx} + bx^2 + c}{e^{nx} + 1}$.

Valorile $a, b, c \in \mathbf{R}$ pentru care funcția f admite primitive sunt:

a) $a = 2, b = 3, c = 1$; b) $a = 1, b = 0, c = 0$; c) $(\forall) a, b, c \in \mathbf{R}$;

d) $a, b \in \mathbf{R}, c = 0$; e) $a = 1, b, c \in \mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Test 4
(pregătitor admiterii la A.S.E.)

I. 1) În **R** ecuația $\left[\frac{2x-1}{3}\right] = x+1$

a) are 2 soluții; b) are 3 soluții;
c) nu are soluții; d) are o infinitate de soluții;
e) nici una dintre afirmațiile precedente nu este adevărată.

2) Fie o funcție $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbf{R}_+$ astfel încât

$(f(1) + f(2) + f(3) + f(4))^4 = 256 \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4)$.

Atunci numărul elementelor mulțimii Imf este:

a) 1; b) 2; c) 4; d) 3; e) orice număr $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

II. 3) Fie $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbf{C}$ soluțiile ecuației $x^5 = 1$. Atunci numărul de elemente ale mulțimii $A = \{x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n + x_5^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ este:

a) 5; b) 25; c) infinit; d) 2; e) 1.

4) Fie x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile complexe ale ecuației

$x^4 - ax^3 + 6x^2 - ax + 1 = 0$, unde $a \in \mathbf{R}$.

Notăm $B = \{a \in \mathbf{R} \mid |x_i| > 1, 1 \le i \le 4\}$ atunci:

a) $B = \varnothing$; b) $B = (-1, 1)$; c) $B = \mathbf{R}$; d) $B = (0, +\infty)$; e) $B = \{0\}$.

III. 5) În S_5 ecuația $\sigma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

a) are 4 soluții; b) are 2 soluții; c) are o soluție;
d) are 12 soluții; e) nu are soluții.

6) Se consideră sistemul $\begin{cases} x \cdot y = y^x \\ x^3 = y^2 \end{cases}$, $x, y > 0$ atunci:

a) sistemul are 4 soluții; b) sistemul are o infinitate de soluții;
c) sistemul are 2 soluții; d) sistemul nu are soluții;
e) nici una dintre afirmațiile precedente nu este adevărată.

IV. 7) În $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ ecuația matricială $X^2 = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ are:

a) o unică soluție; b) nici o soluție; c) 2 soluții;
d) o infinitate de soluții; e) 4 soluții.

Scanned with OKEN Scanner

8) Fie $A \in \mathbf{M}_2(\mathbf{Q})$ cu proprietatea $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$ atunci:

a) $|\mathrm{Tr}(A)| = 2$; b) $|\mathrm{Tr}(A)| = 6$; c) $|\mathrm{Tr}(A)| = 2\sqrt{3}$;
d) $|\mathrm{Tr}(A)| = 4$; e) $|\mathrm{Tr}(A)| = 1$.

V. **9)** Fie $(G, \circ)$ un grup comutativ cu n elemente unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, atunci pentru orice $a \in G$ avem:
a) $a^{n-1} = e$; b) $a^{n+1} = e$; c) $a^n = e$; d) $a^{2n+1} = e$; e) $a^{3n+1} = e$.

10) Numărul permutărilor $\sigma \in S_5$ cu proprietatea că $\sigma(k) \neq k$, $(\forall) k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ este:
a) 7; b) 1; c) 44; d) 3; e) 60.

VI. **11)** $(H, +)$ este subgrup al grupului $(\mathbf{Z}, +)$ pentru:
a) $H = \{5k + 1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$; b) $H = \{5k + 2 \mid k \in \mathbf{Z}\}$;
c) $H = \{5k + 3 \mid k \in \mathbf{Z}\}$; d) $H = \{5k + 4 \mid k \in \mathbf{Z}\}$;
e) $H = \{5k \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

12) Grupul $(\mathbf{R}, +)$ este izomorf cu grupul:
a) $(\mathbf{Q}, +)$; b) $(\mathbf{Q}^*, \cdot)$; c) $(\mathbf{R}^*, \cdot)$; d) $(\mathbf{R}_+^*, \cdot)$; e) $(\mathbf{Q}_+^*, \cdot)$.

VII. **13)** Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pară şi monotonă atunci:
a) f este neconstantă; b) f este constantă;
c) f este nemărginită; d) $f(x) \geq 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$;
e) f este surjectivă.

14) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcție continuă cu proprietatea:

$\int_a^a f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$, $(\forall) a > 0$, atunci:

a) f impară; b) f pară; c) f nemărginită; d) f pară; e) f periodică.

VIII. **15)** Valorile $a, b, c \in \mathbf{R}$ pentru care funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c, & x > 0 \end{cases}$$ este de 2 ori derivabilă pe $\mathbf{R}$ sunt:

a) $a = 1, b = -1, c = 1$; b) $a = \frac{1}{2}, b = -1, c \in \mathbf{R}$; c) $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = 1$;

d) $a = \frac{1}{2}, b = -1, c = 1$; e) $a = \frac{1}{2}, b = -1, c = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

16) Fie $I=\int_0^{\pi/4}(\sin^4 2x+\cos^4 2x)\cdot\ln(1+\operatorname{tg}x)dx$ atunci:

a) $I=\ln 2$; b) $I=\frac{\pi}{4}\cdot\ln 2$; c) $I=\frac{3\pi}{32}$;

d) $I=\frac{3\pi}{16}\cdot\ln 2$; e) $I=\frac{3\pi}{32}\cdot\ln 2$.

IX. 17) Fie $l_1=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{n^3+k}$ atunci:

a) $l_1=0$; b) $l_1=1$; c) $l_1=\frac{1}{3}$; d) $l_1=\frac{1}{2}$; e) $l_1=\frac{1}{6}$.

18) Fie $l_2=\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n^3+k^3}$ atunci:

a) $l_2=1$; b) $l_2=\frac{1}{2}$; c) $l_2=\frac{4}{5}$;

d) $l_2=\frac{\ln 8+\sqrt{3}\cdot\pi}{9}$; e) $l_2=\frac{\ln 8+\sqrt{3}}{9}$.

X. 19) Dacă $l_1=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{5^n}$ atunci:

a) $l_1=+\infty$; b) $l_1=0$; c) $l_1=\frac{1}{5}$; d) $l_1=e$; e) $l_1=1$.

20) Fie $l_2=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$ atunci:

a) $l_2=\frac{1}{e}$; b) $l_2=e$; c) $l_2=1$; d) $l_2=\lg 2$; e) $l_2=\ln 2$.

Scanned with OKEN Scanner

Test 5

(pregătitor admiterii la Facultatea de Arhitectură)

1. Să se discute şi să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x+(m-4)y+3z=m-1 \\ x+2y+(m-3)z=5 \\ 2x+y+z=m \end{cases}, m \in \mathbf{R}.$$

2. Se dă funcția $f:(-\infty, \lambda) \to \mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{\lambda-x}}$.

a) Să se determine λ astfel încât graficul lui f să admită un punct de inflexiune în $x=-4$.

b) Reprezentați grafic funcția f pentru $\lambda=-1$.

3. Rezolvați ecuația:

$2(\sin 6x+\sin 2x)=7(\cos 5x-\cos 3x)$.

4. În triunghiul ABC dreptunghic în A se duce bisectoarea AD, $D \in BC$. Perpendiculara pe BC în D intersectează dreapta AC în E iar paralela la BE prin D intersectează AC în F. Demonstrați că:

a) Triunghiul BDE este isoscel.

b) $FD^2=EF \cdot AF$.

5. O piramidă are baza un dreptunghi cu dimensiunile 6 şi 8, iar muchiile laterale au lungimea de 13.

a) Piciorul înălțimii cade în centrul bazei.

b) Calculați V şi A_t.

c) Calculați distanțele de la centrul bazei la fețele laterale.

Test 6

(pregătitor admiterii la Facultatea de Arhitectură)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} x & 2 \\ y & 1 \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine x, y astfel încât $A^2+A=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Pentru $x=2y$, să se calculeze A^n, $n \in \mathbf{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} x+4y+z-2t=0 \\ 2x-5y-4z+2t=0 \\ 5x+3y-3z+4t=0 \\ 2x-ay-2z=0 \end{cases}$$, are soluții nenule.

3. a) Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

b) Să se determine asimptotele funcției $f: D \to \mathbf{R}$

$f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}$, unde D este domeniul maxim de definiție.

4. Se consideră un cub $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a. Să se calculeze:

a) măsura unghiului diedru dintre planele (ABC) și (ACB');

b) Aria triunghiului ACB'; c) distanța de la A' la planul (ACB').

5. a) În exteriorul dreptunghiului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABE și BCF. Să se arate că:

$EF = EC = AF = DF = DE$

b) Rezolvați ecuația: $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$.

Test 7

(pregătitor admiterii la Facultatea de Arhitectură)

1. Fie $A, B \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ cu $B = I_2 + A$.

Ce condiție trebuie să îndeplinească A pentru care avem relația

$$B+B^2+B^3+\ldots+B^n=n\cdot I_2+\frac{n(n+1)}{2}\cdot A.$$

2. Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic în A dacă și numai dacă

$$\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}=\frac{a+b+c}{2\sqrt{2}\cdot a}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3. În orice tetraedru $ABCD$ în care MN, PQ şi RS sunt bimediane are loc relația:

$$4(MN^2 + PQ^2 + RS^2) = AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2.$$

4. Demonstrați egalitatea:

$$2 \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} = \operatorname{arctg}\frac{32}{43}.$$

5. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \le 0 \\ ax^2 + bx + c, & x > 0 \end{cases}$.

Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât f este de 2 ori derivabilă pe $\mathbf{R}$.

Test 8

(pregătitor admiterii la Politehnică)

Proba de Algebră şi Elemente de analiză matematică

1. Valorile lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care rădăcinile x_1 şi x_2 ale ecuației $(m + 1)x^2 + 2mx + 5 = 0$ verifică condiția $x_1 - x_2 = 2$ sunt:

a) $m = -\frac{6}{7}$; b) $m = -1$; c) $m = \frac{6}{7}$; d) $m = \frac{7}{6}$; e) $m = -2$; f) $m = 2$.

2. Ecuația $\sqrt[6]{2x + 3} = -x$ are în $\mathbf{R}$:

a) o unică soluție; b) 6 soluții; c) 3 soluții;
d) nici o soluție; e) 2 soluții; f) 5 soluții.

3. Fie $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$ un determinant de ordin n, atunci:

a) $D = n$; b) $D = 2$; c) $D = n + 1$; d) $D = 0$; e) $D = -1$; f) $D = n - 1$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Se consideră şirul $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{n+1}$, $(\forall) n \geq 1$ atunci:

a) $(a_n)_n$ este monoton; b) $(a_n)_n$ este convergent la 1;

c) $(a_n)_n$ este periodic; d) $(a_n)_n$ este divergent;

e) $(a_n)_n$ este nemărginit; f) $(a_n)_n$ nu conține subşiruri convergente.

5. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 3x$, atunci $(f^{-1})'(4)$:

a) nu există; b) $+\infty$; c) $\frac{1}{6}$; d) 51; e) 6;

f) nici un rezultat precedent nu este adevărat.

6. Fie $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$, atunci:

a) $I = +\infty$; b) $I = 0$; c) $I = \frac{\pi}{2}$; d) $I = \pi$; e) $I = 2\pi$; f) $I = \frac{\pi}{4}$.

7. Locul geometric al vârfurilor parabolelor asociate familiei de funcții de gradul al doilea $f_m(x) = x^2 - 2(m-1)x + m$, $m \in \mathbf{R}$ este:

a) o dreaptă; b) o semidreaptă; c) un semicerc;
d) un arc de cerc; e) o parabolă; f) o hiperbolă.

8. Pe mulțimea R se definește legea „$*$" prin $x * y = x \cdot y - ax + by$.
Cuplurile (a, b) pentru care $(\mathbf{R}, *)$ este monoid sunt:

a) $(0, 0)$; b) $\{(1, -1), (0, 0)\}$; c) $\{(0, 0), (-1, 1)\}$;
d) $\{(0, 0), (-1, -1)\}$; e) $(-1, 1)$; f) alt răspuns.

9. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{-x} + mx$, unde $m \in \mathbf{R}$. Mulțimea $A = \{m \in \mathbf{R} \mid f \text{ admite un punct de extrem}\}$ este:

a) $A = \varnothing$; b) $A = \{0\}$; c) $A = \mathbf{R}$;
d) $A = [0; +\infty)$; e) $A = (-\infty, 0)$; f) $A = (0, +\infty)$.

10. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^4, & x < 0 \\ x^4, & x \geq 0 \end{cases}$ atunci:

a) f nu este strict monotonă; b) f este discontinuă în $x = 0$;
c) $(\exists) I \subset \mathbf{R}$, I interval pentru care $f(I)$ nu este interval;

Scanned with OKEN Scanner

d) f nu este derivabilă în $x = 0$; e) f^{-1} nu este derivabilă în $x = 0$;
f) f nu este bijectivă.

11. Dacă $a = \sqrt{3}$; b) $b = \sqrt[3]{4}$; c) $c = \sqrt[12]{75}$ atunci:
a) $a < b < c$; b) $c < b < a$; c) $c < a < b$;
d) $a < c < b$; e) $b < a < c$; f) $b < c < a$.

12. Polinomul $f = AX^{n+1} + BX^n + 1$ se divide prin $(x-1)^2$ pentru:
a) $A = 0$ şi $B = -1$; b) $B = 0$ şi $A = -1$; c) $A = n$ şi $B = -n$;
d) $A = n$ şi $B = -(n+1)$; e) $A = 2$ şi $B = -3$; f) $A = 5$ şi $B = -6$.

13. Dacă $\mathbf{Z} = (1 + i)^{50}$ atunci:
a) $z = 0$; b) $z = 2^{50}$; c) $z = 2^{25}$; d) $z = -2^{25}$; e) $z = -2^{25} \cdot i$; f) $z = 2^{25} \cdot i$.

14. Sistemul: $\begin{cases} 3^{x^2+y^2} = 81 \\ \log_2 x + 2 \cdot \log_4 y = 1 \end{cases}$
a) are 2 soluții; b) 4 soluții; c) nu are soluții;
d) o unică soluție; e) are 3 soluții;
f) altă afirmație în afara celor precedente este adevărată.

15. Polinomul $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.
a) este ireductibil în $\mathbf{C}[X]$; b) este ireductibil în $\mathbf{R}[X]$;
c) este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$; d) este reductibil în $\mathbf{Z}[X]$;
e) este reductibil în $\mathbf{Q}[X]$; f) are cel puțin o rădăcină reală.

16. Valorile lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \in \mathbf{Q} \\ mx - 1, & x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$$ are un singur punct de continuitate, sunt:

a) $m \in \mathbf{Q}$; b) $m \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$; c) $m \in \mathbf{R}$; d) $m = -1$;
e) $m \in \{-1, 3\}$; f) $m = 0$.

17. Dacă $I = \int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$ atunci:

a) $I = \frac{\pi}{2}$; b) $I = \pi$; c) $I = 0$; d) $I = 2\pi$;

e) $I = \frac{\pi}{3}$; f) nici o afirmație precedentă nu este adevărată.

Scanned with OKEN Scanner

18. Dacă $A=\int_{-1}^{1}\frac{x^4+1}{x^6+1}dx$ atunci:

a) $A=\frac{2\pi}{3}$; b) $A=\frac{\pi}{3}$; c) $A=\frac{\pi}{2}$; d) $A=\frac{4}{3}$; e) $A=\pi$; f) $A=\frac{3\pi}{2}$.

Test 9

(pregătitor admiterii la Politehnică)

Proba de Gemetrie plană, Geometrie în spațiu şi Trigonometrie

1. Se consideră un triunghi ABC în care medianele BB' şi CC' sunt perpendiculare, atunci:

a) $b^2+c^2=a^2$; b) $b^2+c^2=2a^2$; c) $b^2+c^2=5a^2$;

d) $m_a^2+m_b^2+m_c^2=9a^2$; e) $b^2-c^2=a^2$; f) $2b\cdot c>5a^2$.

2. Fie triunghiul ABC şi $O\in \text{Int}(ABC)$ atunci:

a) $OA+OB+OC\geq AB+BC+CA$;

b) $OA+OB+OC\leq\frac{AB+BC+CA}{2}$;

c) $OA+OB+OC\leq BC$; d) $AB+AC\leq OB+OC$;

e) $OA+OB+OC<AB+AC+BC$;

f) nici una dintre afirmațiile anterioare nu este adevărată.

3. Fie $A, B, C, \in (0, \pi)$ pentru care avem

$\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C+\sin B\cdot\sin C=1$ atunci:

a) există un triunghi ABC echilateral;

b) există un triunghi isoscel cu baza BC;

c) există un triunghi dreptunghic ABC;

d) există un triunghi ABC;

e) există un triunghi obtuzunghic ABC;

f) nici o afirmație precedentă nu este adevărată.

4. Dacă un poligon regulat are 135 de diagonale atunci măsura unui unghi al său este de:

a) 155°; b) 150°; c) 165°; d) 160°; e) 175°; f) 162°30'.

Scanned with OKEN Scanner

5. Fie punctele B şi C fixe şi A mobil pe un cerc dat. Locul geometric al centrului cercului înscris în triunghiul ABC este:

a) o dreaptă; b) o semidreaptă; c) un cerc; d) un arc de cerc;
e) reuniunea a două arce de cerc; f) un arc de parabolă.

6. În triunghiul ABC avem: $c = 5$, $b = 6$ şi $m(\hat{A}) = 60^\circ$, atunci valoarea raportului $\frac{R}{r}$ este:

a) $\frac{31+11\sqrt{31}}{45}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{\sqrt{31}}{2}$; d) $\frac{5+2\sqrt{31}}{4}$; e) $\frac{31+11\sqrt{31}}{15\sqrt{3}}$; f) $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

7. În trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$), fie O intersecția diagonalelor AC şi BD. Dacă triunghiul COD este echilateral atunci mijloacele segmentelor $(O\bar{A})$, (BC)şi (OD) sunt vârfurile unui triunghi:

a) dreptunghic isoscel; b) echilateral; c) obtuzunghic; d) scalen;
e) dreptuntghic; f) nici o afirmație precedentă nu este adevărată.

8. Fie $ABCD$ un tetraedru oarecare. Bisectoarele unghiurilor $B\hat{D}C$, $C\hat{D}A$ şi $A\hat{D}B$ intersectează (BC), (CA) şi respectiv (AB) în punctele M, N, P, atunci planele (ADM), (BDN) şi (CDP):

a) sunt perpendiculare două câte două;
b) sunt concurente în punctul D;
c) se intersectează după o dreaptă;
d) sunt paralele;
e) sunt concurente două câte două;
f) Nici o afirmație anterioară nu este adevărată.

9. Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$ de muchie l. Distanța dintre două muchii opuse este:

a) $\frac{l\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{l\sqrt{2}}{2}$; c) $l\sqrt{2}$; d) l; e) $l\sqrt{3}$; f) $2l$.

10. Locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de punctele necoliniare A, B şi C este:

a) un plan; b) o dreaptă; c) o semidreaptă; d) un punct;
e) o sferă; f) mulțimea vidă.

11. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu apotema şi muchia bazei egale cu 12, atunci aria totală este:

a) 144; b) 432; c) 684; d) 864; e) 468; f) 288.

Scanned with OKEN Scanner

12. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie $AB = 6$. Distanța de la B' la planul $(AD'C)$ este:

a) $4\sqrt{3}$; b) 6; c) $3\sqrt{2}$; d) $6\sqrt{3}$; e) $3\sqrt{3}$; f) $2\sqrt{3}$.

13. Aria laterală a unui trunchi de con circular drept este de 30π, volumul său este de 31π, iar înălțimea este de 3, atunci lungimea generatoarei va fi:

a) 4; b) 6; c) 5; d) 10; e) 15; f) 12.

14. Într-un cilindru a cărui secțiune axială este un pătrat cu latura 6 se înscrie o sferă atunci raportul dintre volumul sferei şi volumul cilindrului este:

a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{5}{2}$; d) $\frac{2}{3}$; e) $\frac{1}{3}$; f) $\frac{2}{5}$.

15. $\sin 1062^\circ$ este egal cu:

a) $-\frac{1}{2}$; b) $-\frac{\sqrt{5}}{4}$; c) $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$; d) $-\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$; e) $\frac{3-\sqrt{11}}{2}$; f) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

16. În triunghiul ABC se cunoaşte că $\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{16}$, atunci $\cos A + \cos B + \cos C$ este egal cu:

a) $\frac{5}{4}$; b) 2; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{3}{2}$; e) $\frac{5}{2}$; f) $\frac{7}{4}$.

17. Ecuația $\sqrt{3}\cdot\sin x+\cos x=2$ are în intervalul $[0, 6\pi]$:

a) o infinitate de soluții; b) unica soluție $x=\frac{\pi}{3}$; c) 2 soluții;

d) 4 soluții; e) 3 soluții; f) nu are soluții.

18. Fie $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ soluțiile ecuației $z^2 + z + 1 = 0$ atunci mulțimea $A=\left\{z_1^n+z_2^n \mid n\in\mathbf{N}\right\}$ are:

a) o infinitate de elemente; b) 2 elemente;
c) 3 elemente; d) 6 elemente; e) 4 elemente;
f) nici o afirmație precedentă nu este adevărată.

Scanned with OKEN Scanner

REZOLVĂRI

Test 1

I. 1) d) este adevărată.

Prin inducție se arată că $a_n, b_n > 0$, $(\forall)\, n \geq 0$.

Aplicăm inegalitățile mediilor obținem $b_n < a_n$, $(\forall)\, n \geq 0$.

$$b_0 < b_1 < a_1 < a_0.$$

Presupunem că $a_n < a_{n-1}$.

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < \frac{a_n + a_n}{2} = a_n, \quad (\forall) n \geq 0.$$

Cum $0 < a_n$, $(\forall)\, n \geq 0 \Rightarrow (a_n)_n$ este convergent.

$$L_1 = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

$b_0 < b_1$. Presupunem că $b_{n-1} < b_n$;

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n} > \sqrt{b_n^2} = b_n, \quad (\forall) n \geq 0 \Rightarrow (b_n)_n, \text{ strict crescător.}$$

2) d) este adevărată.

Din $b_n \leq a_n < a_0$, $(\forall)\, n \geq 1$ şi $(b_n)_n$ strict crescător $\Rightarrow (b_n)_n$ este convergent;

$$L_2 = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Trecând la limită în prima relație de recurență obținem:

$$L_1 = \frac{L_1 + L_2}{2} \Rightarrow L_1 = L_2.$$

II. 3) $f(x) = \begin{cases} -\sin^3 x & x \in \left[\frac{-\pi}{2}, 0\right) \\ \sin^3 x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

c) este adevărată.

$$\lim_{x\uparrow 0} (-\sin^3 x) = 0 = \lim_{x\downarrow 0} \sin^3 x = f(0).$$

Deci f este continuă în $x = 0$.

$$\lim_{x\uparrow 0} \frac{\sin^3 x}{x} = -\lim_{x\uparrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin^2 x = 0 = f_s'(0)$$

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin^2 x = 0 = f_d'(0).$$

Deci f este derivabilă în $x = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

f continuă pe $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ ca restricții de funcții elementare.

Cum f continuă în $x=0 \Rightarrow f$ continuă pe $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

f derivabilă pe $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi cum f derivabilă în $x=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ derivabilă pe $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \Rightarrow$ este aplicabilă teoremei lui Rolle şi $c=0$ este punctul intermediar.

Deci c) este adevărată şi d), e) sunt false.

4) d) este adevărată.

$$I=\int_0^{\pi/2}\sin^3 x\,dx=\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\cdot\sin x\,dx=\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx=$$

$$=+\int_0^{\pi/2}(\cos^2 x-1)\cdot(-\sin x)dx\,.\ \text{Notăm } y=\cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=+\int_1^0(y^2-1)\,dy=+\frac{y^3}{3}\Big|_1^0-y\Big|_1^0=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}.$$

III. 5) b) este adevărată

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ este derivabilă şi $f'(0)=0$.

6) c) este adevărată.

Facem substituția $\sqrt{x^2+1}=x+t \Rightarrow x=\frac{1-t^2}{2t}$,

$$dx=-\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt \Rightarrow \sqrt{1+x^2}=\frac{t^2+1}{2t}.$$

Deci $I=\frac{1}{4}\cdot\int_{\sqrt{2}-1}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{(1-t^2)^2}{t^3}\,dt=\frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2t^2}-2\ln t\right)\Big|_{\sqrt{2}-1}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{3\sqrt{2}-2}{6}+\frac{1}{4}\ln\frac{3}{3+2\sqrt{2}}$.

Scanned with OKEN Scanner

IV. **7)** a) Este afirmația adevărată

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 2\\ 3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix} \text{ şi } \overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -3 & -2\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & a\\ 2 & 1 & b\end{pmatrix}.$$

Deoarece $\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2+3=5\neq 0 \Rightarrow \text{rang}\,(A)=2.$

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & a\end{vmatrix}=5a-10 \text{ şi } D_2=\begin{vmatrix}1 & -3 & -2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & b\end{vmatrix}=5b-15.$$

Sistemul este compatibil $\Leftrightarrow D_1=0$ şi $D_2=0 \Leftrightarrow a=2$ şi $b=3$.

8) Pentru $a=2$ şi $b=3$, soluția sistemului este $\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$, deci afirmația a) este adevărată.

V. **9)** c) este afirmația adevărată.

10) c) este afirmația adevărată.

Din $f'(x)=5x^4$, $f''(x)=20x^3>0$, $(\forall)\,x>0 \Rightarrow f$ este strict convexă $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Luând $x_1=a$ şi $x_2=3$ obținem $\left(\frac{a+3}{2}\right)^5\leq\frac{a^5+243}{2} \Leftrightarrow A\leq B$, $(\forall)\,a>0$.

VI. **11)** d) este afirmația adevărată.

$f(x)=8^x+6\cdot 2^x$.

f este funcție strict crescătoare deoarece este suma a două funcții strict crescătoare.

$f(0)=7 \Rightarrow f(x)<7 \Leftrightarrow x\in(-\infty, 0)$.

În **Z** inegalitatea are deci o infinitate de soluții.

12) d) este afirmația adevărată.

f este funcție elementară $\Rightarrow f$ este derivabilă.

Cum f este strict crescătoare $\Rightarrow f'(x)\geq 0$, $(\forall)\,x\in\mathbf{R}$.

VII. **13)** e) este afirmația adevărată.

$\sin 3x\leq 1$, $(\forall)\,x\in\mathbf{R} \Rightarrow -\sin 3x\geq -1 \Rightarrow 4-\sin 3x\geq 3 \Rightarrow \log_3(4-\sin 3x)\geq 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Din $\cos\frac{12x}{5} \le 1$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow A = \{x \in \mathbf{R} \mid \sin 3x = 1 \text{ şi } \cos\frac{12x}{5} = 1\} =$

$= \left\{\frac{5\pi}{6} + \frac{10k\pi}{3} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

14) a) este afirmația adevărată.

VIII. 15) d) este adevărată.

$\varepsilon(x^2) = \varepsilon(x) \cdot \varepsilon(x) = \varepsilon^2(x) = 1$

$\varepsilon(\sigma) = -1 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții.

16) e) este adevărată.

S_5 este mulțimea finită şi f fiind injectivă $\Rightarrow$ f este surjectivă deci şi bijectivă.

Test 2

I. 1) a) adevărată.

Funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = -x^3$ este bijectivă.

$f \circ f = g \Rightarrow f$ injectivă şi f surjectivă.

Dacă f este strict monotonă atunci $f \circ f$ este strict crescătoare;

Cum g este strict descrescătoare, egalitatea $f \circ f = g$ nu poate avea loc.

Din $(f \circ f)(x) = -x^3 \Rightarrow (f \circ f)(f(x)) = f(-x^3) = -f^3(x)$.

Pentru $x = 0$ obținem $f(0) = -f^3(0) \Rightarrow f(0)(1 + f^2(0)) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

2) e) adevărată.

Metoda I

$\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbf{Z}$.

Presupunem că ecuația are rădăcini raționale $\Rightarrow \Delta = k^2$ unde $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow$ $\Rightarrow b^2 - k^2 = 4ac \Leftrightarrow (b - k)(b + k) = 4ac$. Cum b, k sunt impare $\Rightarrow$ $\Rightarrow b$, k sunt de forma $4p + 1$, sau de forma $4p + 3$ sau unul de forma $4p + 1$ iar celălalt de forma $4t + 3 \Rightarrow 2 \mid ac$, contradicție.

Metoda II

Dacă $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ este soluție a ecuației ($p, q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$ şi $(p, q) = 1$) atunci

$q \mid a$, $p \mid c \Rightarrow q$ şi p sunt impare;

$a \cdot \frac{p^2}{q^2} + b \cdot \frac{p}{q} + c = 0 \Rightarrow a \cdot p^2 + bpq + cq^2 = 0$ egalitate ce nu poate avea loc deoarece numerele ap^2, bpq şi $c \cdot q^2$ sunt impare.

Scanned with OKEN Scanner

II. 3) b) adevărată.

$P(0) = 0 \Rightarrow x \mid P$; $P(3) = 0 \Rightarrow (x-3) \mid P \Rightarrow P(x) = x \cdot (x-3) \cdot Q(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-1) \cdot Q(x-1) = (x-3)\, Q(x) \Rightarrow Q(1) = 0$ şi $Q(2) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow Q(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot R(x) \Rightarrow R(x) = R(x-1)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow R(x) = m \Rightarrow$
$\Rightarrow P(x) = m \cdot x(x-1)(x-2)(x-3)$ şi cum $P(4) = 24m \neq 0 \Rightarrow m \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ grad $P = 4$; $P(k) \vdots 24$, $(\forall)\, k \in \mathbf{Z}$.

4) c) adevărată.

Pentru $n = 2$ obţinem: $a_2 \cdot a_0 + a_1^2 + a_0 a_2 = 4 \cdot a_2 \Rightarrow 2a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2!}$;

Pentru $n = 3$ obţinem: $a_0 \cdot a_3 + a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_1 + a_3 a_0 = 8a_3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 6a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3!}.$$

Vom demonstra prin inducţie varianta II, că $a_n = \frac{1}{n!}$.

Presupunem că $a_k = \frac{1}{k!}$, $0 \le k \le n$.

$$a_0 \cdot a_{n+1} + a_1 \cdot a_n + a_2 \cdot a_{n-1} + \ldots + a_n \cdot a_1 + a_{n+1} \cdot a_0 = 2^{n+1} \cdot a_{n+1}$$

$$\frac{1}{1!\, n!} + \frac{1}{2!(n-1)!} + \ldots + \frac{1}{n! \cdot 1} = (2^{n+1} - 2) \cdot a_{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{n+1}{1!} + \frac{(n+1)\cdot n}{2!} + \ldots + \frac{n+1}{1!}\right] = (2^{n+1} - 2)\, a_{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!}\left(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^n\right) = (2^{n+1} - 2) \cdot a_{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)!}[(1+1)^{n+1} - 2] = (2^{n+1} - 2) \cdot a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

deci $a_n = \frac{1}{n!}$, $(\forall)\, n \ge 0$.

III. 5) e) adevărată.

Notăm $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi înlocuim în egalitatea dată pe $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ apoi

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vom obţine $c = b = 0$ şi $d = a \Rightarrow A = a \cdot I_2$.

$A \cdot X = X \cdot A$, $(\forall)\, X \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$.

Scanned with OKEN Scanner

6) c) adevărată,

$f(n) = n + k$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$ unde $f(0) = k \in \mathbf{N}$.

IV. 7) b) adevărată.

f ireductibil în $\mathbf{C}[X] \Leftrightarrow$ grad $f = 1$

f ireductibil în $\mathbf{R}[X] \Leftrightarrow$ grad $f = 1$ sau grad $f = 2$ cu $\Delta < 0$.

f ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$ şi $\mathbf{Q}[X]$; demonstrația utilizează criteriul de ireductibilitate al lui Eisenstein.

8) c) adevărată.

Utilizăm relațiile lui Viète:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -1 \\ x_1x_2x_3 = 1 \end{cases}$$ Notăm $S_n = \frac{1}{x_1^n} + \frac{1}{x_2^n} + \frac{1}{x_3^n}$

$$S_1 = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} = -1;\ S_2 = \frac{x_1^2 \cdot x_2^2 + x_2^2 \cdot x_3^2 + x_3^2 \cdot x_1^2}{(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^2} = 1;$$

$S_3 = 2;\quad S_4 = -3.$

V. 9) b) adevărată.

$$A^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{4} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{4} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{4} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix}$$

$$A^8 = A^4 \cdot A^4 = A^2;\ A^{16} = A^4;\ A^{24} = A^{16} \cdot A^8 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{4} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix}$$

10) a) adevărată.

Dezvoltarea are 201 termeni.

Numărul termenilor iraționali = 201 – numărul termenilor raționali

$$T_{k+1} = C_{200}^k \left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{200-k} \cdot \left(5^{\frac{1}{6}}\right)^k = C_{200}^k \cdot 3^{50-\frac{k}{4}} \cdot 5^{\frac{k}{6}} \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4 \mid k$ şi $6 \mid k \Leftrightarrow 12 \mid k$

$12 \cdot 0, 12 \cdot 1, \ldots, 12 \cdot 16 \Rightarrow$ 17 termeni din dezvoltare sunt raționali $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 184 de termeni sunt iraționali.

VI. 11) c) adevărată

$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ deoarece $8 < 9$.

Scanned with OKEN Scanner

$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$, $(\forall)\, n \geq 3 \Leftrightarrow n^{n+1} > (n+1)^n \Leftrightarrow n \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \leq n$ inegalitate cunoscută $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sup A = \sqrt[3]{3}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow \inf A = 1 \Rightarrow \sup A + \inf A = 1 + \sqrt[3]{3}$.

12) b) adevărată

$$\sin\sqrt[3]{x+1} - \sin\sqrt[3]{x} = 2\sin\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x}}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{1}{2(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x(x+1)}+\sqrt[3]{x^2}}\cdot\cos\frac{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x}}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

VII. 13) adevărată

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \in [-1,0) \\ \sqrt{x}, & x \in [0,1] \end{cases}$$

g continuă; $g'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{\sqrt{-x}}{x} = -\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{\sqrt{-x}}{(\sqrt{-x})^2} = -\infty$

$g'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ deci g nu este derivabilă în $x = 0$.

14) b) adevărată.

Notăm $g(x) = e^{-x}$ şi $h(x) = x^3$, $f = g \cdot h$;

g, h sunt indefinit derivabile şi $g^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot e^{-x}$;

$h^{(n)} = 0$, $(\forall)\, n \geq 4$. Aplicând formula lui Leibniz de derivare vom obține:

$$f^{(n)} = g^{(n)}\cdot h + C_n^1 \cdot g^{(n-1)}\cdot h' + C_n^2 \cdot g^{(n-2)}\cdot h'' + C_n^3 \cdot g^{(n-3)}\cdot h''' =$$

$$= (-1)^n \cdot e^{-x}\cdot x^3 + (-1)^{n-1}\cdot n\cdot e^{-x}\cdot 3x^2 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot(-1)^{n-2}\cdot e^{-x}\cdot 6x +$$

$$+ n(n-1)(n-2)\cdot(-1)^{n-3}\cdot e^{-x}$$

$l = \lim\limits_{n\to+\infty} f^{(n)}(n) = 0$ deoarece $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^k}{e^n} = 0$ pentru $k \in \mathbf{N}$ fixat.

Scanned with OKEN Scanner

VIII. 15) e) adevărată.

$$x_{2n}=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\xrightarrow[n]{}e\ ;\ x_{2n+1}=\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\xrightarrow[n]{}\frac{1}{e}$$

deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este divergent.

16) e) adevărată.

$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n^2}$. Dăm lui n valori de la 1 la $(n-1)$ şi obţinem:

$$x_2-x_1=1$$

$$x_3-x_2=\frac{1}{2^2}$$

$$\vdots$$

$$x_n-x_{n-1}=\frac{1}{(n-1)^2}$$

Adunând egalităţile vom obţine:

$$x_n-x_1=1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}x_n=1+\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2+6}{6}$$

deoarece $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ (Euler).

IX. 17) d) adevărată

$$\frac{k+5}{ak+1}<\frac{2}{a+1}\Leftrightarrow\frac{5a+3}{a-1}<k\ ;\ m=\left[\frac{5a+3}{a-1}\right]+1$$

$$0<x_n<\prod_{k=1}^{m-1}\frac{k+5}{ak+1}\left(\frac{2}{a+1}\right)^{n-m+1}\xrightarrow[n]{}0\ \text{deci}\ x_n\xrightarrow[n]{}0\ .$$

18) a) adevărată.

Notăm $a_n=\sum\limits_{i,j}^{n}\frac{1}{i+j}$ şi $b_n=n$; $(b_n)_n$ crescător şi nemărginit.

Aplicând teorema lui Stolz-Cesaro obţinem

$l=2\cdot\ln 2$.

X. 19) b) adevărată.

Dacă f este continuă $\Rightarrow$ f are proprietatea lui Darboux şi $f((a,b])\subset\mathbf{R}^*\Rightarrow$ $\Rightarrow$ f păstrează acelaşi semn pe $(a,b]$.

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem că $f(x) > 0$, $(\forall)\, x \in (a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx > 0$, contradicție.

Dacă $f(x) < 0$, $(\forall)\, x \in (a, b] = \int_a^b f(x)\,dx < 0$ contradicție.

Deci f este discontinuă pe $[a, b]$.

20) d) adevărată.

Fie $x > 1$; $\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \int_0^1 e^{-t^2}dt + \int_1^x e^{-t^2}\,dt < \int_0^1 e^{-t^2}\,dt + \int_1^x e^{-t}\,dt < 1+1=2$.

Funcția $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ este derivabilă și $F'(x) = e^{-x^2} > 0$ deci F este crescătoare. Cum F este majorată de $2 \Rightarrow (\exists) \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=l \in \mathbf{R}$.

Observație. Se poate arăta că $l = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Test 3

I. 1) d) adevărată.

În **C** nu există relație de ordine totală.

Deci se impun condițiile $z^2 - z \in \mathbf{R}$ și $z^2 - z \le 0$.

Fie $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$;

$z^2 - z = x^2 - y^2 + 2xyi - x - iy = (x^2 - y^2 - x) + (2xy - y)i \in \mathbf{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow (2x - 1) \cdot y = 0$.

Dacă $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} - y^2 - \frac{1}{2} \le 0 \Leftrightarrow y^2 \ge -\frac{1}{4} \Rightarrow y \in \mathbf{R}$ deci $z = \frac{1}{2} + iy$ sau

$y = 0$ și $x^2 - x \le 0 \Rightarrow x \in [0, 1]$ și $y = 0 \Rightarrow z \in [0, 1]$.

2) a) adevărată

Fie x soluție $\Rightarrow x^3 = x + 5 \Rightarrow x^4 = x^2 + 5x$; $x^5 = x^3 + 5x^2 = 5x^2 + x + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(x) = 5x^2 + x + 5 - 5x^2 - 25x + 24x + 120 + 3x + 8 = 3x + 133$.

$\alpha = P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) = 3(x_1 + x_2 + x_3) + 399 = 399$,

deoarece din relațiile lui Viète $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

II. 3) d) adevărată.

$|x_1| = |x_2| \Leftrightarrow x_1 = x_2$ sau $x_1 = -x_2$

$\Delta = (m - 1)^2 - 4m^2 = -3m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$3m^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m \in \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$ sau $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Deci $m \in \left\{-1, \frac{1}{3}, 1\right\}$.

4) b) adevărată.

Fie $A_a, A_b \in G$; $A_a \cdot A_b = A_{a+b} \in G$.

Înmulțirea matricilor este asociativă.

$A_0 = I_3 \in G$ este element neutru.

Det $A = 1 \neq 0$ și $A_a^{-1} = A_{-a} \in G$.

$A_b \cdot A_a = A_{b+a} = A_{a+b} = A_a \cdot A_b$ deci $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

$(G, \cdot) \cong (\mathbf{R}, +)$ deoarece $f : \mathbf{R} \to G$, $f(x) = A_x$ este izomorfism de grupuri.

Cum $(\mathbf{R}, +) \ncong (\mathbf{R}^*, \cdot) \Rightarrow$ c) afirmație falsă.

Adunarea nu este operație algebrică pe G, deci a) și e) sunt false.

III. 5) b) adevărată.

Dacă $x \leq -\frac{4}{3} \Rightarrow 8^x \cdot (3x+4) \leq 0$.

Dacă $x > -\frac{4}{3}$. Funcția $f(x) = 8^x \cdot (3x+4)$ este strict crescătoare $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ecuația $f(x) = 4$ are cel mult o soluție.

Cum $f(0) = 4 \Rightarrow x = 0$ este unica soluție a ecuației.

6) c) adevărată.

$x \in [-2, 7]$; Aplicăm inegalitatea lui Cauchy-Schwarz.

$$|x| \cdot \sqrt{x+2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{7-x} \leq \sqrt{x^2+2} \cdot \sqrt{9} = 3\sqrt{x^2+2}.$$

Egalitatea se atinge când:

$\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{7-x}}$; $x = 7$ nu e soluție deci: $x \in [0, 7) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 - 7x^2 + 2x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 3 + \sqrt{13}$, $x_3 = 3 - \sqrt{13}$;

x_3 nu convine deoarece $x \in [0, 7)$.

Deci ecuația are 2 soluții: $x_1 = 1$ și $x_2 = 3 + \sqrt{13}$.

IV. 7) c) adevărată.

$$S_n = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{a_n - a_1}{r \cdot a_1 \cdot a_n} = \frac{(n-1) \cdot r}{r \cdot a_1 \cdot a_n} = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

8) c) adevărată.

$$d=(x_1+x_2+x_3)\cdot\begin{vmatrix}1 & x_2 & x_3\\ 1 & x_3 & x_1\\ 1 & x_1 & x_2\end{vmatrix}=6[-(x_1+x_2+x_3)^2+3(x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_3\cdot x_1)]=-18.$$

V. **9)** b) adevărată.

$N = 6! - 5! = 720 - 120 = 600$

10) e) adevărată.

A inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

$\det(A) = (1-m)x^2 + 2x + 3 - 2m \neq 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

$$m \neq 1 \text{ şi } \Delta < 0 \Rightarrow 2m^2 - 5m + 2 > 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty).$$

VI. **11)** c) adevărată.

$$I = \lim_{n\to+\infty} (2,72)^n \left[\left(\frac{e}{2,72}\right)^n - 1\right] = -\infty.$$

12) a) adevărată.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+\sin 3x)^{\frac{1}{\sin 3x}}\right]^{\frac{\sin 3x}{x}} =$$

$= e^3 = f(0) \Rightarrow f$ continuă în $x = 0$, f continuă pe $\mathbf{R}^*$ ca restricție de funcție elementară $\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbf{R} \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ este funcție derivabilă.

Aplicând teorema lui l'Hospital obținem:

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = e^3.$$

VII. **13)** a) adevărată.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \cdot \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

14) d) adevărată.

Vom calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}}{\frac{1}{x^2}}=\dfrac{\ln a}{2}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot a^{\frac{1}{x}}-\dfrac{x^3}{(x+1)^2}\cdot a^{\frac{1}{x+1}}\right)=$

$=\dfrac{\ln}{a}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a^{\frac{1}{x}}-1+1-\dfrac{x^2}{(x+1)^2}\cdot a^{\frac{1}{x+1}}\right)=\dfrac{\ln^2 a}{2}+\dfrac{\ln a}{2}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\dfrac{x^2}{(x+1)^2}\cdot a^{\frac{1}{x+1}}\right)=$

$=\dfrac{\ln^2 a}{2}+\dfrac{\ln a}{2}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\left(1-a^{\frac{1}{x+1}}+a^{\frac{1}{x+1}}-\dfrac{x^2}{(x+1)^2}\cdot a^{\frac{1}{x+1}}\right)=$

$=\dfrac{\ln a}{2}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot a^{\frac{1}{x+1}}\cdot\dfrac{2x+1}{x^2+2x+1}=\ln a.$

VIII. 15) a) adevărată.

$x_{4n}\xrightarrow[n]{}0$ şi $x_{8n}\xrightarrow[n]{}1$ deci $(x_n)_{n\geq1}$ este divergent.

16) c) adevărată.

IX. 17) b) adevărată.

18) $f_{n+1}(x)=\int_1^x\dfrac{(t-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt=\dfrac{(t-1)^n}{n!}\Big|_1^x=\dfrac{(x-1)^n}{n!}$ deci $f_n(x)=\dfrac{(x-1)^{n-1}}{(n-1)!}$, $(\forall)\,n\geq1$

$a_n=f_{n+1}(2)=\dfrac{1}{n!}\xrightarrow[n]{}0.$

X. 19) b) adevărată.

Luăm $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ şi $g(x)=x^n$.

Aplicăm teorema de medie deci $(\exists)\,c\in[0,1]$ a.î.:

$I_n=f(c)\cdot\int_0^1x^n\,dx=\dfrac{1}{c+2}\cdot\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\dfrac{1}{c+2}\cdot\dfrac{1}{n+1}\xrightarrow{n}0.$

20) d) adevărată.

$$f(x)=\begin{cases}bx^2+c, & x<0\\ \dfrac{c}{2}, & x=0\\ ax, & x>0\end{cases}.$$

Pentru $c=0$ f este continuă pe $\mathbf{R}\Rightarrow f$ admite primitive.
Dacă $c\neq0$ atunci $x=0$ este punct de discontinuitate de speța I $\Rightarrow f$ nu are proprietatea lui Darboux $\Rightarrow f$ nu admite primitive.

Scanned with OKEN Scanner

Test 4

I. 1) b) adevărată.

Notăm $k=\left[\frac{2x-1}{3}\right]\in\mathbf{Z}$; $k\le\frac{2x-1}{3}<k+1$ şi $k=x+1\Rightarrow$

$\Rightarrow k\le\frac{2k-3}{3}<k+1\Rightarrow k\in(-6,-3]\cap\mathbf{Z}\Rightarrow k\in\{-5,-4,-3\}\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\{-6,-5,-4\}$.

2) a) adevărată.

$$\frac{f(1)+f(2)+f(3)+f(4)}{4}=\sqrt[4]{f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)}\,.$$

Conform inegalității mediilor $M_a\ge M_g$ iar egalitatea are loc când numerele sunt egale. Deci $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)$.

II. 3) d) adevărată.

$$x^5=\cos 0+i\sin 0\Rightarrow x_k=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5},\ 0\le k\le 4$$

$U_5=\{x\in\mathbf{C}\mid x^5=1\}=\{1,x_1,x_1^2,x_1^3,x_1^4\}$

$S_n=1+x_1^n+x_1^{2n}+x_1^{3n}+x_1^{4n}$. Dacă $5|n\Rightarrow S_n=5$.

Dacă $5\nmid n\Rightarrow S_n=\frac{x_1^{5n}-1}{x_1^n-1}=0$, deci $A=\{0,5\}$.

4) a) adevărată.

Ecuația fiind reciprocă o dată cu rădăcina α ea admite şi rădăcina $\frac{1}{\alpha}$.

Din $|x_1|>1\Rightarrow x_2=\frac{1}{x_1}$ este rădăcină şi $|x_2|=\frac{1}{|x_1|}<1\Rightarrow B=\varnothing$.

III. 5) e) adevărată.

$$\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&2&5&1\end{pmatrix},\ m(\pi)=3+2+1+1=7$$

$\varepsilon(\pi)=(-1)^{m(\pi)}=-1;\ \varepsilon(\sigma^4)=(\varepsilon(\sigma))^4=1$, deci ecuația nu are soluții.

Reamintim că funcția $\varepsilon:S_n\to\{-1,1\}$ este un morfism de grupuri.

6) c) adevărată.

Logaritmăm ambele ecuații şi vom obține:

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{cases} \lg x + \lg y = x \cdot \lg y \\ \lg y = \frac{3}{2} \cdot \lg x \end{cases} \Rightarrow \lg x \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{3x}{2} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lg x = 0 \Rightarrow x = 1 = y \text{ sau } x = \frac{5}{3} \text{ şi } y = \frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}.$$

IV. 7) b) adevărată.

$\det x^2 = (\det x)^2 = -1$ dar $\det x \in \mathbf{R}$, deci ecuația nu are soluții.

8) $\det A^2 = 1 \Rightarrow \det A \in \{-1, 1\}$.

Scriem ecuația caracteristică a matricii A (teorema Hamilton-Cayley).

$A^2 - \mathrm{Tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = 0$.

Dacă $\det A = 1 \Rightarrow A^2 - \mathrm{Tr}(A) \cdot A + I_2 = 0$. Aplicând Tr $\Rightarrow$

$\mathrm{Tr}\, A^2 - (\mathrm{Tr}\, A)^2 + 2 = 0 \Rightarrow (\mathrm{Tr}\, A)^2 = 16 \Rightarrow |\mathrm{Tr}(A)| = 4$.

Dacă $\det A = -1 \Rightarrow A^2 - \mathrm{Tr}(A) \cdot A - I_2 = 0 \Rightarrow (\mathrm{Tr}\, A)^2 = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow |\mathrm{Tr}(A)| = 2\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$.

V. 9) c) adevărată.

Fie $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ şi $a \in G$.

Funcția $f : G \to G$, $f(x) = a \cdot x$ este injectivă ($ax_1 = ax_2 \mid a^{-1} \Rightarrow x_1 = x_2$).

Din G finită şi f injectivă $\Rightarrow$ f bijectivă $\Rightarrow$ $G = \{a \cdot a_1, a \cdot a_2, \ldots, a \cdot a_n\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^n \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots a_n = a_1 \cdot a_2 \ldots a_n \Rightarrow a^n = e$.

Observație. În demonstrație s-a utilizat comutativitatea grupului $(G, \cdot)$.

Afirmația rezultă direct din teorema lui Lagrange.

10) c) adevărată.

O permutare $\sigma \in S_n$ pentru care $\sigma(k) \neq k$, $(\forall)\ 1 \leq k \leq n$ se numeşte deranjament. Mulțimea $D(n)$ a deranjamentelor din S_n are cardinalul:

$$|D(n)| = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \right).$$

Pentru demonstrație se utilizează principiul includerii şi excluderii.

Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulțimi finite, atunci $\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| +$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \left| \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right|.$$

Numărul deranjamentelor $|D(n)|$ se determină prin scăderea din numărul permutărilor $|S_n| = n!$ a numărului de permutări ce admit puncte fixe.

Scanned with OKEN Scanner

Vom determina numărul acestor permutări.

Fie $A_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$, $|A_i| = (n-1)!$

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)!, \ldots, \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| = 1$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = C_n^1 \cdot (n-1)! - C_n^2 (n-2)! + C_n^3 (n-3)! - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot C_n^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |D(n)| = n! - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = n! - C_n^1 \cdot (n-1)! + C_n^2 \cdot (n-2)! - \ldots$$

$$+ (-1)^n \cdot C_n^n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Pentru $n = 5$ obținem $|D(5)| = 44$.

VI. 11) e) adevărată.

H subgrup al lui $\mathbf{Z} \Leftrightarrow (\exists) n \in \mathbf{N}$ a.î. $H = n\mathbf{Z}$.

În cazul nostru $H = 5 \cdot \mathbf{Z}$.

12) d) adevărată.

$\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^*$, $\mathbf{Q}_+^*$ sunt mulțimi numărabile iar $\mathbf{R}$ nu este numărabilă. Neexistând bijecție între $\mathbf{R}$ și aceste mulțimi rezultă că grupurile respective nu sunt izomorfe.

Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$, $f(x) = e^x$ este un izomorfism de grupuri, deci afirmația d) este adevărată.

Presupunem că $(\exists) g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^*$ un izomorfism de grupuri.

Deci $g(x + y) = g(x) \cdot g(y)$, $(\forall)\, x, y \in \mathbf{R}$.

Pentru $y = x \Rightarrow g(2x) = g^2(x) \geq 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow g(x) \geq 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, contradicție, deoarece g este surjectivă și $g(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^*$.

VII. 13) b) adevărată.

Să considerăm f funcție crescătoare.

Dacă $x > 0 \Rightarrow -x < 0 < x \Rightarrow f(-x) \leq f(0) \leq f(x)$ și $f(-x) = f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = f(0)$, $(\forall)\, x > 0$.

Dacă $x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow x < 0 < -x \Rightarrow f(x) \leq f(0) \leq f(-x)$ și $f(x) = f(-x)$ deci $f(x) = f(0)$, $(\forall)\, x < 0$. Deci $f(x) = f(0)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

14) d) adevărată.

f continuă $\Rightarrow f$ admite primitive $\Rightarrow (\exists) F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabilă a.î. $F' = f$.

Aplicăm formula Leibniz-Newton $\Rightarrow F(a) - F(-a) = 2F(a) - 2F(0)$, $(\forall)\, a > 0$.

Derivând obținem: $f(a) + f(-a) = 2 \cdot f(a) \Rightarrow f(-a) = f(a)$, $(\forall)\, a > 0$ deci f este pară.

Scanned with OKEN Scanner

VIII. 15) d) adevărată.

f continuă pe $\mathbf{R}^*$ ca restricție de funcții elementare. $l_s(0) = l_d(0) \Rightarrow c = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f$ continuă în $x = 0$.

f este derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ și $f'(x) = \begin{cases} 2ax + b, & x > 0 \\ -e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$

$f_s'(0) = f_d'(0) \Rightarrow b = -1 \Rightarrow f$ derivabilă în $x = 0$

$f''(x) = \begin{cases} 2a, & x > 0 \\ e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$, $f_s''(0) = f_d''(0) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

16) e) adevărată.

Vom utiliza formula: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$, unde $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă.

$$I = \int_0^{\pi/4} \left[\cos^4\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \sin^4\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right] \cdot \ln\frac{2}{1+\operatorname{tg} x}\,dx.$$

Adunând cele 2 relații obținem:

$$2 \cdot I = \ln 2 \cdot \int_0^{\pi/4} (\sin^4 2x + \cos^4 2x)\,dx = \ln 2 \cdot \int_0^{\pi/4} (1 - 2\sin^2\cos^2 x)\,dx =$$

$$= \ln 2 \cdot \int_0^{\pi/4} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 2x\right) dx = \ln 2 \cdot \int_0^{\pi/4} \left[1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 8x)\right] dx =$$

$$= \frac{3\pi}{16} \cdot \ln 2 \Rightarrow I = \frac{3\pi}{32} \cdot \ln 2.$$

IX. 17) c) adevărată.

$$\frac{1}{n^3+n} \cdot \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k}{n^3+n} \le x_n \le \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k}{n^3+1} =$$

$$= \frac{1}{n^3+1}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) \text{ și rezultă } x_n \xrightarrow{n} \frac{1}{3}.$$

18) d) adevărată.

$x_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^3}$. Definim funcția $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$.

$f(x) = \frac{1}{1+x^3}$ ce este continuă $\Rightarrow f$ integrabilă.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, n\right)$ o diviziune a intervalului $[0, 1]$,

$\|\Delta_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n]{} 0$ şi $\xi_k = \frac{k}{n}$;

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \xi) = x_n \xrightarrow[n]{} \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\ln(x+1)\Big|_0^1 - \frac{1}{6}\cdot\ln(x^2-x+1)\Big|_0^1 +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{\ln 8 + \pi\cdot\sqrt{3}}{9}.$$

X. 19) a) adevărată.

$$x_n := \frac{n!}{5^n} > 0,\ (\forall)\, n \geq 1;\ \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{5} \xrightarrow[n]{} +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$

20) e) adevărată

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n} - \ln 2n\right) -$$

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) + \ln 2n - \ln n \xrightarrow[n]{} \ln 2.$$

Test 5

1. $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & m-4 & 3 \\ 1 & 2 & (m-3) \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2m^2 - 16m + 24 = 2(m^2 - 8m + 12) =$

$$= 2(m-2)(m-6)$$

Dacă $m \in \mathbf{R} - \{2, 6\}$ sistemul este compatibil determinat şi soluţiile se determină cu ajutorul formulelor lui Cramer $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ şi $z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.

Dacă $m = 2$ atunci $\operatorname{rg}(A) = 2$ şi $\operatorname{rg}(\bar{A}) = 3$ deci sistemul este incompatibil.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $m = 6$ atunci $rg(A) = rg(\overline{A})$ deci sistemul este compatibil nedeterminat.

$$X = \lambda \in \mathbf{R} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 3z = 5 - \lambda \\ y + z = 6 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3\lambda - 7 \\ y = -5\lambda + 13 \end{cases}$$

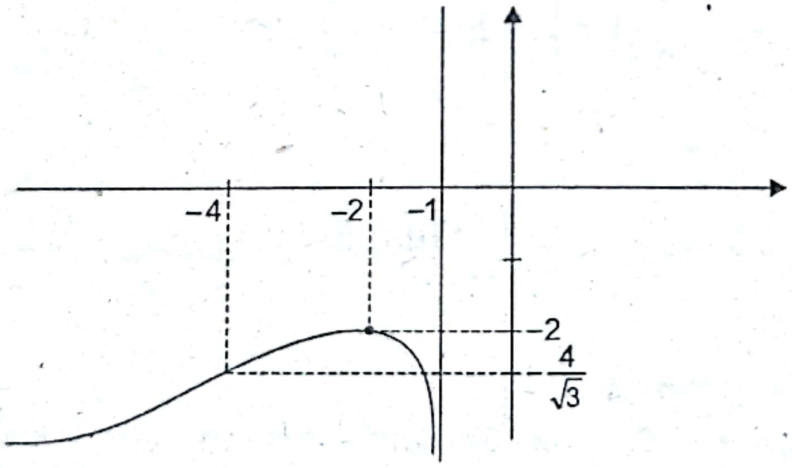
$$\text{Deci } \begin{cases} x = \lambda \\ y = -5\lambda + 13, \lambda \in \mathbf{R}. \\ z = 3\lambda - 7 \end{cases}$$

2. a) $f'(x) = \dfrac{2\lambda - x}{2(\lambda - x)^{3/2}}$; $f''(x) = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{(\lambda - x)^{5/2}} \cdot \left[\lambda - x - \dfrac{3}{2}(2\lambda - x)\right]$

$f''(-4) = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

b)

x	$-\infty$			-4		-2		-1
f'	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	
f	$-\infty$			$-\dfrac{4}{\sqrt{3}}$		-2		$-\infty$
f''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	



3. $4 \sin 4x \cdot \cos 2x = -14 \sin 4x \cdot \sin x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 4x(2\cos 2x + 7 \sin x) = 0$, $\sin 4x = 0 \Rightarrow 4x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$ sau

$2\cos 2x + 7 \sin x = 0 \Leftrightarrow 2(1 - 2\sin^2 x) + 7 \sin x = 0$.

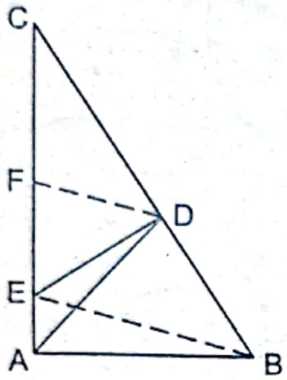
Notăm $y = \sin x \in [-1, 1]$. Ecuația devine $4y^2 - 7y - 2 = 0$

$y_1 = 2 \notin [-1, 1]$ şi $y = -\dfrac{1}{4} \in [-1,1]$

Scanned with OKEN Scanner

$$\sin x = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = (-1)^k \cdot \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

4.



a) $m(\widehat{EAB}) + m(\widehat{EDB}) = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Patrulaterul $EABD$ este inscriptibil $\Rightarrow$

$\Rightarrow m(\widehat{DEB}) = m(\widehat{DAB}) = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\widehat{DBE}) = 45^\circ \Rightarrow \Delta EDB$ isoscel.

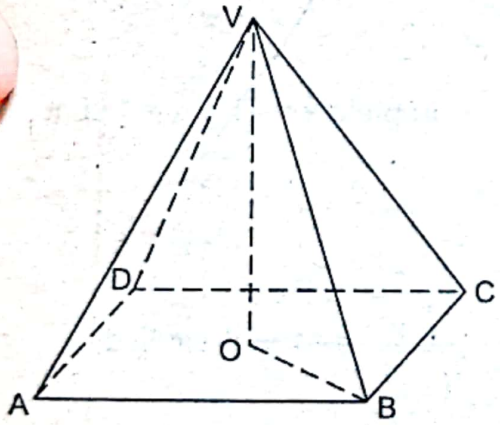
b) $m(\widehat{FDE}) = m(\hat{B}) \Rightarrow \Delta FED \sim \Delta FDA \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{FD}{FA} = \frac{FE}{FD} = \frac{ED}{DA} \Rightarrow FD^2 = FE \cdot FA.$

5. a) Fie $VO \perp (ABCD)$. Din $VA = VB = VC = VD \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta VOA = \Delta VOB = \Delta VOC = \Delta VOD$ (C.C) $\Rightarrow$

$\Rightarrow OA = OB = OC = OD \Rightarrow O$ centrul dreptunghiului.



b) $AB = 8$, $BC = 6 \Rightarrow BD = 10$, $OB = 5$.

În ΔVOB dreptunghic în O deducem $VO = 12$.

$$V = \frac{AB \cdot BC \cdot VO}{3} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 12}{3} = 192.$$

$$A_t = 24(2 + \sqrt{10} + \sqrt{17}).$$

c) $d_1 \cdot \sqrt{10} = 12 = d_2 \cdot \sqrt{17}$.

Testul 6

1. a) $A^2 = \begin{pmatrix} x & 2 \\ y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 2 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 2y & 2x + 2 \\ xy + y & 2y + 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 + A = \begin{pmatrix} x^2 + 2y + x & 2x + 4 \\ xy + 2y & 2y + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2x + 4 = 6 \Rightarrow x = 1$ şi $3y = -3$, $y = -1$

Scanned with OKEN Scanner

b) $A=\begin{pmatrix} 2y & 2 \\ y & 1 \end{pmatrix}$; $\det A = 0$.

Ecuația caracteristică este: $A^2 - \mathrm{Tr}(A)\cdot A + \det(A)\cdot I_2 = 0$ şi cum $\det(A)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A^2 = \mathrm{Tr}(A)\cdot A \Rightarrow A^n = (\mathrm{Tr}(A))^{n-1}\cdot A \Rightarrow A^n = (2y+1)^{n-1}\cdot\begin{pmatrix} 2y & 2 \\ y & 1 \end{pmatrix}$.

2. Sistemul fiind omogen este compatibil.

Pentru a avea soluții nenule este necesar ca $\det(A)=0$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \\ 5 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & -a & -2 & 0 \end{vmatrix} = 6(6a-4)=0 \Rightarrow a=\frac{2}{3}.$$

3) a) $\lim\limits_{x\to 0}\left\{[1+(\sin x+\cos x-1)]^{\frac{1}{\sin x+\cos x-1}}\right\}^{\frac{\sin x+\cos x-1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos x-1}{x}\right)} = e$.

b) $D=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty \Rightarrow$ dreptele $x=-1$ şi $x=1$ sunt asimptote verticale la graficul lui f.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -1 \Rightarrow$$ dreapta de ecuație $y=-1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul lui f şi

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}} = 1 \Rightarrow$ dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul lui f.

4. a) $\Delta B'AC$ este echilateral cu $B'A = B'C = a\sqrt{2} = AC$

$B'O=\frac{\sqrt{2}a\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$; $B'O\perp AC$ şi $OB\perp AC \Rightarrow \alpha = m(BOB')$ este măsura unghiului diedru dintre planele (ABC) şi $(AB'C)$.

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{B'B}{OB} = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \mathrm{arctg}\,\sqrt{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

b) $S_{AB'C} = \dfrac{AC \cdot B'O}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

c) Fie d distanța de la A' la planul $(AB'C)$.

$$V_{A'AB'C} = \frac{S_{AB'C} \cdot d}{3} = \frac{S_{A'AB'} \cdot BC}{3} \Rightarrow d = \frac{S_{A'AB'} \cdot BC}{S_{AB'C}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

5. a) Fie $AB = a$ şi $BC = b$;

$$m(\widehat{EBF}) = m(\widehat{EBC}) = m(\widehat{DCF}) = m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{ABF}) = 150^\circ$$

$$\Delta BEF \equiv \Delta BEC \equiv \Delta AED \equiv \Delta BAF \equiv \Delta CDF \text{ (L.U.L.)}$$

$$\Rightarrow EF = EC = AF = DF = DE.$$

b) $\dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{3} \cdot \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x + \frac{\pi}{3} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Test 7

1. $B = I_2 + A$

$B^2 = I_2 + 2A + A^2$

$B^3 = I_2 + 3A + 3A^2 + A^3$

$\vdots$

$B^n = I_2 + nA + C_n^2 \cdot A^2 + \ldots + A^n$

$B + B^2 + \ldots + B^n = n \cdot I_2 + \dfrac{n(n+1)}{2}A + (1 + 3 + \ldots + C_n^2)A^2 + \ldots + A^n$

Deci $A^2 = 0$

2. $\cos\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-b)}{ac}}$ şi $\cos\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-c)}{ab}}$

$$\cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} = \frac{p}{\sqrt{2} \cdot a} \Leftrightarrow (a + c - b)(a + b - c) = 2bc \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - (b - c)^2 = 2bc \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow m(\hat{A}) = 90^\circ.$$

Scanned with OKEN Scanner

3. În tetraedrul $ABCD$, fie R mijlocul lui $[AB]$, S mijlocul lui $[CD]$, P mijlocul lui $[BC]$, Q mijlocul lui $[AD]$, M mijlocul lui $[BD]$ şi N mijlocul lui $[AC]$.

În ΔDNB, MN este mediană şi aplicăm teorema medianei:

$$MN^2 = \frac{1}{2}(DN^2 + NB^2) - \frac{1}{4}BD^2$$

$[DN]$ este mediană în ΔDAC iar $[BN]$ este mediană în ΔABC şi aplicând teorema medianei obţinem:

$$MN^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + AD^2 + DC^2) - \frac{1}{4}AC^2 - \frac{1}{4}BD^2 .$$

Analog se obţin:

$$PQ^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + BD^2 + CD^2) - \frac{1}{4}AD^2 - \frac{1}{4}BC^2$$

$$RS^2 = \frac{1}{4}(AC^2 + AD^2 + BD^2 + BC^2) - \frac{1}{4}AB^2 - \frac{1}{4}CD^2$$

Adunând cele trei egalităţi se obţine relaţia dată.

4. Notăm $\operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \alpha$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{4} = \beta$.

$$\operatorname{tg}(2\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}2\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}; \quad \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

$$\text{Deci } \operatorname{tg}(2\alpha+\beta) = \frac{\frac{5}{12}+\frac{1}{4}}{1-\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{8}{12}\cdot\frac{48}{43} = \frac{32}{43} \Rightarrow 2\alpha+\beta = \operatorname{arctg}\frac{32}{43}.$$

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = f(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) \Leftrightarrow c = 1$

f continuă pe $\mathbf{R} \Leftrightarrow c = 1$

f este derivabilă pe $\mathbf{R}^*$, $f'(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & x<0 \\ 2ax+b, & x>0 \end{cases}$

f este derivabilă pe $\mathbf{R} \Leftrightarrow -1 = b$; f este de 2 ori derivabilă pe $\mathbf{R}^*$,

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x<0 \\ 2a, & x>0 \end{cases}$$

f derivabilă de 2 ori pe $\mathbf{R} \Leftrightarrow 1 = 2a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ şi $c = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Test 8

1. Afirmația a) este adevărată.

$m \neq -1$ şi se utilizează relațiile lui Viète.

2. Afirmația a) este adevărată.

Ecuația se mai scrie $\sqrt[6]{2x+3} + x = 0$.

Funcția $f:\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt[6]{2x+3}+x$ este strict crescătoare şi $f(-1) = 0$.

Deci $x = -1$ este unica soluție.

3. Afirmația c) este adevărată.

4. Afirmația d) este adevărată.

$$a_{2n}=\frac{2n}{2n+1}\xrightarrow{n}1 \text{ şi } a_{2n+1}=\frac{-2n-1}{2n+2}\xrightarrow{n}-1 \text{ deci } (a_n)_n \text{ este divergent;}$$

$|a_n| < 1$, $(\forall)\, n \geq 1 \Rightarrow (a_n)_n$ este mărginit.

5. Afirmația c) este adevărată.

f este derivabilă: $f'(x)=3x^2+3>0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ este strict crescătoare

$\Rightarrow f$ este injectivă.

Cum f este continuă $\Rightarrow f$ are proprietatea lui Darboux.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ deci $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \Rightarrow f$ este surjectivă $\Rightarrow f$ este bijectivă.

$f(x) = 4 \Leftrightarrow x^3 + 3x = 4 \Leftrightarrow x = 1$

$$(f^{-1})'(4)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{6}.$$

6. Afirmația *f*) este adevărată.

$$a_n=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

Definim funcția $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ce este continuă $\Rightarrow f$ integrabilă şi

admite primitive $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\operatorname{arctg} x\,\Big|_0^1=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}.$

Scanned with OKEN Scanner

7. Afirmația e) este adevărată.

$$x_v = m-1,\ y_v = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4m-4(m-1)^2}{4} = -m^2+3m-1.$$

Locul geometric se determină prin eliminarea lui m între cele 2 relații. Vom obține parabola de ecuația: $y = -x^2 + x + 1$.

8. Afirmația c) este adevărată.

9. Afirmația f) este adevărată.

10. Afirmația e) este adevărată.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[4]{-x}, & x<0 \\ \sqrt[4]{x}, & x\geq 0 \end{cases}. \text{ Notăm } g = f^{-1}$$

$$g'_s(0) = \lim_{x\uparrow 0}\frac{-\sqrt[4]{-x}}{x} = \lim_{x\uparrow 0}\frac{\sqrt[4]{-x}}{-x} = \lim_{y\downarrow 0}\frac{\sqrt[4]{y}}{y} = \lim_{y\downarrow 0}\sqrt[4]{\frac{1}{y^3}} = +\infty \text{ (am notat } y=-x)$$

deci f^{-1} nu este derivabilă în $x = 0$.

11. Afirmația b) este adevărată.

$$c^{12} < b^{12} < a^{12} \Leftrightarrow 75 < 256 < 729.$$

12. Afirmația d) este adevărată.

Rezolvăm sistemul $\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases}$ și obținem $A = n$, $B = -(n+1)$.

13. Afirmația f) este adevărată.

$$(1+i)^2 = 2i \Rightarrow (1+i)^{50} = [(1+i)^2]^{25} = (2i)^{25} = 2^{25}\cdot i^{25} = 2^{25}\cdot i.$$

14. Afirmația d) este adevărată.

$$x>0, y>0 \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x\cdot y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = y = \sqrt{2}.$$

15. Afirmația c) este adevărată.

16. Afirmația e) este adevărată.

Fie $x_0 \in \mathbf{R}$ unicul punct de continuitate al lui f. Fie $x_n \in \mathbf{Q}$, $x_n \xrightarrow[n]{} x_0$ și

$x'_n \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$, $x'_n \xrightarrow[n]{} x_0$; $f(x_n) = x_n^2 + x_n \to x_0^2 + x_0$

Scanned with OKEN Scanner

$f(x_n') = mx_n' - 1 \xrightarrow{n} mx_0 - 1$.

Ecuația $x_0^2 + x_0 = mx_0 - 1$ are o unică soluție dacă şi numai dacă $m \in \{-1, 3\}$.

17. Afirmația b) este adevărată.

Facem substituția $x = 2 \cdot \sin t \Rightarrow dx = 2\cos t \cdot dt$

$$I = \int_0^{\pi/2} 16\sin^2 t\cos^2 t\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\,dt = 2\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)\,dt = \pi.$$

18. Afirmația a) este adevărată.

$$A = \int_{-1}^{1} \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \operatorname{arctg} x\,\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \frac{(x^3)'}{(x^3)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\cdot \operatorname{arctg} x^3\,\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}.$$

Test 9

1. Afirmația c) este adevărată. Aplicând teorema medianei obținem:

$$B'B^2 = \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4} = m_b^2 \Rightarrow GB^2 = \frac{4}{9}\cdot B'B^2 = \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{9}.$$

Analog, obținem: $GC^2 = \dfrac{2(a^2+b^2)-c^2}{9}$.

Aplicând teorema lui Pitagora în ΔGBC obținem

$$a^2 = GB^2 + GC^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{4a^2+b^2+c^2}{9} \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2.$$

2. Afirmația e) este adevărată.

$OA + OB < AC + CB$

$OA + OC < AB + BC$

$OB + OC < AB + AC$

Prin adunare se obține inegalitatea: $OA + OB + OC < AB + AC + BC$.

3. Afirmația f) este adevărată.

Presupunem că există un triunghi ABC.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $A > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos A \in (-1,0) \Rightarrow \sin B \cdot \sin C = 1 - \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C > 1$, contradicție (deoarece $\sin B, \sin C \in (0, 1)$). Analog se ajunge la contradicție dacă $B > \frac{\pi}{2}$ sau $C > \frac{\pi}{2}$.

Dacă ΔABC este dreptunghic $\Rightarrow \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 0 \Rightarrow \sin B \cdot \sin C = 1$, contradicție (deoarece un triunghi nu poate avea 2 unghiuri drepte).

Dacă ΔABC este ascuțitunghic $\Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C + \sin B \sin C < \cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C = \cos(B - C) \leq 1$, contradicție.

4. Afirmația d) este adevărată.

$$\frac{n(n-3)}{2} = 135 \Rightarrow n = 18 \Rightarrow m(\hat{A}) = 160^\circ.$$

5. Afirmația e) este adevărată.

Fie I centrul cercului înscris $\Rightarrow m(\widehat{BIC}) = 90^\circ + \frac{m(\hat{A})}{2}$.

Din B și C puncte fixe $\Rightarrow BC$ segment fix $\Rightarrow m(\hat{A})$ = constantă $\Rightarrow m(\widehat{BIC}) =$ = constantă $\Rightarrow$ locul geometric este format din reuniunea a două axe de cerc, având extremitățile în B și C (arcul capabil de unghi dat).

6. Afirmația a) este adevărată.

$BC = \sqrt{31}$. Aplicând teorema sinusurilor obținem:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{\sqrt{31}}{\sqrt{3}}; \; r = \frac{S}{p} = \frac{15\sqrt{3}}{11+\sqrt{31}} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{31+11\sqrt{31}}{45}.$$

7. Afirmația b) este adevărată.

Fie M, N și P mijloacele segmentelor (AO), (BC) și (OD). Deoarece triunghiul DOC este echilateral rezultă că și triunghiul AOB este echilateral și din $\Delta AOD \equiv \Delta BOC$ $\Rightarrow AD = BC \Rightarrow ABCD$ este trapez isoscel, MP este linie mijlocie în ΔAOD $\Rightarrow MP = \frac{AD}{2}$; în ΔCOD avem CP mediană și înălțime $\Rightarrow \Delta BPC$ este dreptunghic în $P \Rightarrow PN = \frac{BC}{2}$. În ΔAOB echilateral avem BM = mediană, deci MB este și înălțime $\Rightarrow \Delta BCM$ este dreptunghic $\Rightarrow MN = \frac{BC}{2}$. Deci $PM = PN = MN$.

Scanned with OKEN Scanner

8. Afirmația c) este falsă.
Aplicând teorema bisectoarei în ΔDCB, ΔDCA, ΔDAB obținem:

$$\frac{MB}{MC}=\frac{DB}{DC},\ \frac{NC}{NA}=\frac{DC}{DA},\ \frac{PA}{PB}=\frac{DA}{DB}.$$

Prin înmulțirea acestor egalități obținem:

$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=1\Rightarrow (AM)$, (BN) și (CP) sunt segmente concurente într-un punct L (am folosit reciproca teoremei lui Ceva) $\Rightarrow$ planele au ca intersecție dreapta DL.

9. Afirmația b) este adevărată.
Fie M mijlocul segmentului (AB) și N mijlocul lui (CD); $AB\perp MD$, $AB\perp MC\Rightarrow$ $\Rightarrow AB\perp (MDC)\Rightarrow AB\perp MN$; $MC=MD$ și MN mediană în $\Delta MCD\Rightarrow MN\perp CD$, deci distanța între muchiile opuse AB și CD este MN. În $\Delta MNC(m(\widehat{MNC}))=90^\circ$ avem

$$MN^2=MC^2-NC^2=\frac{3l^2}{4}-\frac{l^2}{4}=\frac{l^2}{2}\Rightarrow MN=\frac{l\sqrt{2}}{2}.$$

10. Afirmația b) este adevărată.
Fie O centrul cercului circumscris ΔABC.
Locul căutat este dreapta perpendiculară în punctul O pe planul ΔABC.

11. Afirmația b) este adevărată.

12. Afirmația a) este adevărată.

$\Delta ACD'$ este echilateral cu $AC=CD'=D'A=6\sqrt{2}$, $AE=\frac{2}{3}\cdot\frac{6\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{6}$, unde E este centrul cercului circumscris $\Delta AD'C$; $B'AD'C$ este tetraedru tridreptunghic $\Rightarrow B'E\perp (AD'C\ AD'C)$; $B'E=\sqrt{B'A^2-AE^2}=4\sqrt{3}$.

13. Afirmația c) este adevărată.

$$\begin{cases} R+r=\frac{30}{G} \\ R^2+r^2+Rr=31 \\ R^2+r^2-2Rr-G^2=-9 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} r=1 \\ R=5 \\ G=5 \end{cases}$$

14. Afirmația d) este adevărată.

$$V_{sf}=\frac{4\pi R^3}{3}=36\cdot\pi;\ V_{cil}=\pi\cdot R^2\cdot h=54\pi\Rightarrow\frac{V_{sf}}{V_{cil}}=\frac{2}{3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

15. Afirmația c) este adevărată.

$$\sin 1062^\circ = \sin(360^\circ \cdot 30 - 18^\circ) = \sin(-18^\circ) = -\sin 18^\circ = -\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

16. Afirmația a) este adevărată.

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

17. Afirmația e) este adevărată.

Ecuația se mai scrie: $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x + \frac{1}{2}\cdot\cos x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \Rightarrow$ soluțiile din intervalul $[0, 6\pi]$ sunt: $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}+2\pi, \frac{\pi}{3}+4\pi$.

18. Afirmația b) este adevărată.

$$z_1 = \varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ \varepsilon_1^3 = \varepsilon_2^3 = 1$$

$$z_2 = \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2};\ \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2,\ \varepsilon_2^2 = \varepsilon_1.$$

Dacă $n = 3k \Rightarrow z_1^{3k} + z_2^{3k} = 2$.

Dacă $n = 3k+1 \Rightarrow z_1^{3k+1} + z_2^{3k+1} = \left(\varepsilon_1^3\right)^k \cdot \varepsilon_1 + \left(\varepsilon_2^3\right)^k \cdot \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -1.$

Dacă $n = 3k+2 \Rightarrow z_1^{3k+2} + z_2^{3k+2} = \left(\varepsilon_1^3\right)^k \cdot \varepsilon_1^2 + \left(\varepsilon_2^3\right)^k \cdot \varepsilon_2^2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_1 = -1.$

Deci $A = \{2, -1\}$.

Scanned with OKEN Scanner

EDITURILE ALL

ALL ♦ ALL BECK ♦ ALLFA
ALL EDUCATIONAL

CORESPONDENȚĂ RĂSPUNS
C.R.
SE TAXEAZĂ LA DESTINAȚIE

Bd.Timişoara nr. 58, sector 6, 76548 - Bucureşti sau C.P. 12-107
Tel. (01)-402.26.20; (01)-402.26.37; (01)-402.26.00; (01)-402.26.80;
Fax: (01)-402.26.10 - Fax Distribuţie: (01)-402.26.30

TALON DE COMANDĂ

Trimiteţi talonul de comandă, completat conform dorinţei dumneavoastră, pe adresa Editurii ALL: Bucureşti, O.P. 12, C.P. 107, beneficiind de o reducere de *10%* din preţul cărţilor pe care vi le oferim.

EXPEDITOR

Nume _____
Adresă _____
_____
Telefon contact _____
Profesie _____
Cod client _____

DESTINATAR

Editurile ALL
Bucureşti
O.P. 12, C.P. 107

Folosiţi serviciul EDITURA ALL *Cartea prin Poştă!*

NOI VĂ ADUCEM CĂRŢILE ACASĂ!

Menţionaţi domeniile pentru care doriţi să primiţi, GRATUIT, catalogul semestrial.

- ☐ ŞTIINŢE JURIDICE
- ☐ ŞTIINŢE ECONOMICE
- ☐ ŞTIINŢE UMANISTE
- ☐ BELETRISTICĂ
- ☐ ŞTIINŢE EXACTE
- ☐ INFORMATICĂ
- ☐ ŞTIINŢE MEDICALE
- ☐ ÎNVĂŢĂMÂNT (lucrări auxiliare)

Plata se face ramburs, la primirea coletului poştal. Taxele poştale de expediţie sunt suportate de editură.
PENTRU COMENZI MAI MARI DE 10 EXEMPLARE, CUMULAT, BENEFICIAŢI DE O REDUCERE DE PREŢ DE 20 %

Scanned with OKEN Scanner

Cod	Titlu / Autor	Preţ	Nr. ex. comand.
	ÎNVĂŢĂMÂNT LICEAL		
285	871 DE PROBLEME DE MATEMATICĂ - vol. I, II Eliferie Rogai, Laurenţiu Modan	34900 lei	
930	975 TESTE ŞI PROBLEME REZOLVATE DE CHIMIE ORGANICĂ PENTRU BACALAUREAT ŞI ADMITERE Cornelia Gheorghiu, Lia Cojocaru	44900 lei	
003	ABORDARE GLOBALĂ A GEOMETRIEI TRIUNGHIULUI CU IMPLICAŢII CREATIVE - Constantin C. Florea, Corina Daniela C. Florea	9900 lei	
727	ANALIZE ŞI APLICAŢII FILOSOFICE. ÎNDRUMAR AL MANUALULUI DE FILOSOFIE PENTRU LICEE - Nicolae Stan	34900 lei	
033	BIENVENUE EN FRANCE - vol. I, Méthode de français. Manual, caiet de exerciţii şi supliment de corectură (cuprinde lecţiile de limba franceză de la TVR) Annie Monnerie-Goarin	59900 lei	
470	BIENVENUE EN FRANCE - vol. II, Méthode de français. Manual, caiet de exerciţii şi supliment de corectură (cuprinde lecţiile de limba franceză de la TVR) Annie Monnerie-Goarin	59900 lei	
471	CHIMIE ŞI PROBLEME DE CHIMIE ORGANICĂ Paraschiva Arsene, Cecilia Marinescu	59900 lei	
902	CULEGERE DE MATEMATICĂ. TESTE-GRILĂ PENTRU BACALAUREAT ŞI ADMITERE - Dumitru Marin, Tudorel Andrei, Gheorghe Cenuşă, Stelian Stancu	54900 lei	
780	ECONOMIE. PLANURI, SINTEZE, TESTE, PROBLEME, SUBIECTE ÎN SPRIJINUL CANDIDAŢILOR LA BACALAUREAT ŞI LA ADMITEREAÎN FACULTĂŢILE ECONOMICE ŞI DE DREPT - Gavril Horja	34900 lei	
484	FILOSOFIE. LECŢII ŞI ANTOLOGIE DE TEXTE PENTRU TEMELE: FILOSOFIA, FERICIREA ŞI DREPTATEA Mihaela Miroiu, Adrian Miroiu	24900 lei	
486	GÂNDIŢI FIZICA ! - Lewis Carroll Epstein	49900 lei	
781	GEOGRAFIE. TESTE ŞI SINTEZE PENTRU BACALAUREAT, ADMITERE ÎN ÎNVĂŢĂMÂNTUL SUPERIOR ŞI CONCURSURI ŞCOLARE - Silviu Neguţ, Octavian Mândruţ, Dumitru Alexandru	49900 lei	
562	GHIDUL BACALAUREATULUI. SUBIECTELE DE MATEMATICĂ DATE ÎNTRE 1966-1996, CU REZOLVĂRI COMPLETE Ion Crăcea, Liviu Crăcea	39900 lei	
590	GRAMATICA LIMBII LATINE - Maria Pârlog, Gabriela Creţia	34900 lei	
706	GRAMATICA NUMELOR PROPRII ÎN LIMBA ROMÂNĂ Domniţa Tomescu	34900 lei	
535	GRAMATICĂ ŞI STILISTICĂ. ANALIZE DE TEXT Cristina Ionescu, Matei Cerkez	24900 lei	
894	ISTORIA PENTRU ADMITERE ÎN ÎNVĂŢĂMÂNTUL SUPERIOR Bogdan Murgescu, Nicoleta Dumitrescu, Doru Dumitrescu, Codruţa Matei, Rodica Tudorică, Aurelian Tudorică	44900 lei	
257	NUMERE COMPLEXE ÎN MATEMATICA DE LICEU Marian Dincă, Marcel Chiriţă	13900 lei	
447	PROBLEME ALESE DE GEOMETRIE PENTRU LICEE GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAŢIU, GEOMETRIE ANALITICĂ - Mihail Popescu	49900 lei	

Editurile ALL îşi rezervă dreptul de a face modificări asupra preţurilor menţionate!

Scanned with OKEN Scanner

Exerciții, probleme și teste de matematică

Lucrarea vine în sprijinul candidaților pentru examenul de bacalaureat și admitere în învățământul superior prin exerciții și teste, alese astfel, încât să se realizeze obiectivele cerute de programa pentru proba de matematică.

Structura lucrării în trei unități:

- *exerciții și probleme recapitulative*
- *subiecte tip bacalaureat*
- *teste pentru admiterea în învățământul superior*

oferă posibilitatea candidaților de a parcurge pregătirea într-o ordine naturală, de la simplu la complex, cu posibilitatea autoevaluării în condițiile exemenelor de bacalaureat și admitere în învățământul superior.

Niculae Ghiciu
prof. gr. I., Inspector general la Ministerul Educației Naționale

Costel Chiteș
prof. gr. I., Colegiul Național Mihai Viteazul București

ISBN 973-9431-18-6

9 789739 431187

Scanned with OKEN Scanner